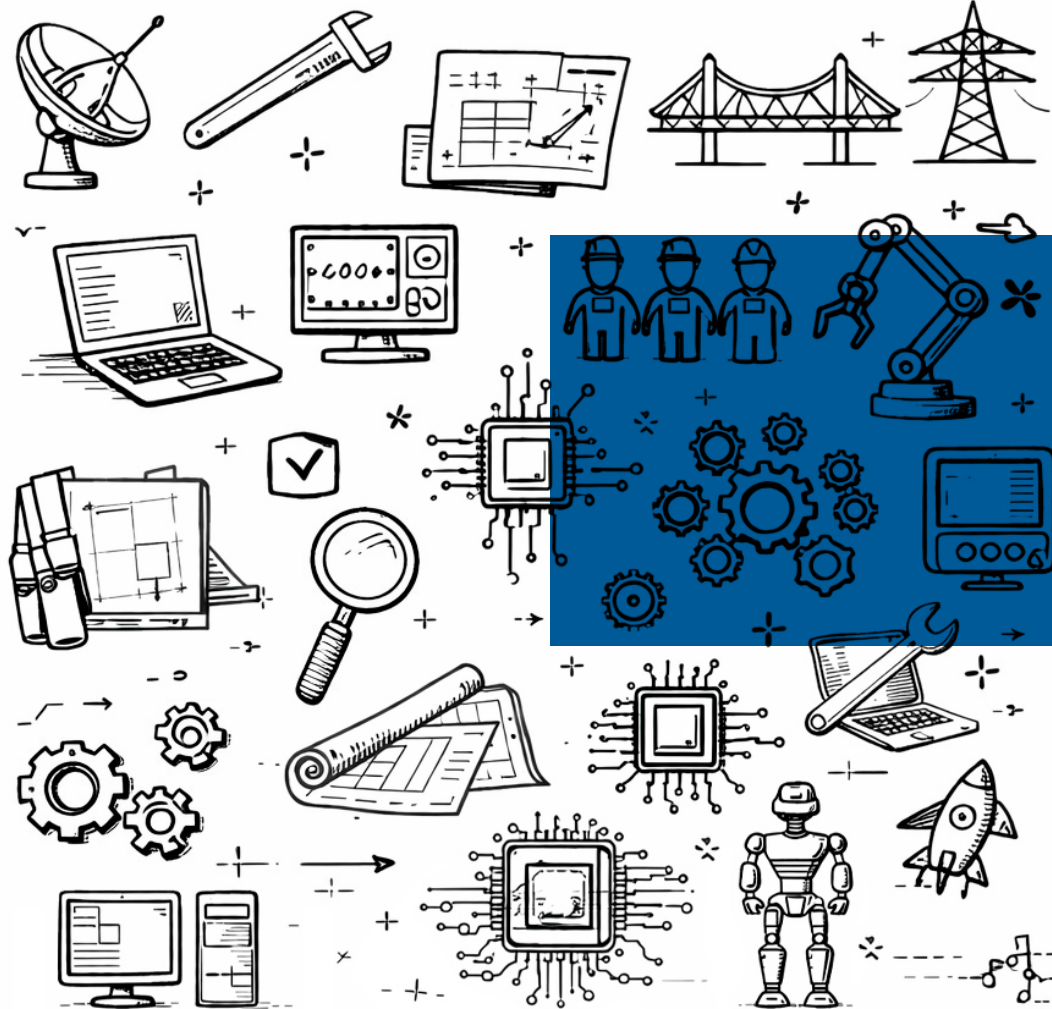




2

ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE ONDAS SÍSMICA PARA LA EXPLORACIÓN DE HIDROCARBUROS EN UN MEDIO HOMOGÉNEO

ANALYSIS OF SEISMIC WAVE BEHAVIOR FOR HYDROCARBON EXPLORATION IN A HOMOGENEOUS MEDIUM

⁴Santhier Stiwar Mosquera Ampudia

⁵Yilber Javier Quinto Díaz

⁶Haslen Palacios Bonilla

⁴ MSc. Matemáticas Aplicadas. Universidad Tecnológica del Chocó Diego Luis Córdoba. Cvlac: https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0001503861. Orcid: <https://orcid.org/0009-0008-2810-8650>, Correo: santhierstiwar.mosquera@utch.edu.co.

⁵ DSc. Ciencia Matemática. Universidad Tecnológica del Chocó Diego Luis Córdoba. Cvlac: https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0001484023. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-8537-0144>, Correo: yilber.quinto@utch.edu.co

⁶ MSc. Física Aplicadas. Universidad Tecnológica del Chocó Diego Luis Córdoba. Correo: haslen.palacios@utch.edu.co, Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-3405-7502>. Cvlac: <https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/EnRecursoHumano/inicio.do>

RESUMEN

El estudio del comportamiento de las ondas sísmicas constituye un aspecto fundamental en la exploración geofísica, dado que su correcta modelación permite comprender mejor la dinámica de los medios terrestres y optimizar los procesos de interpretación de datos. En el contexto de la exploración de hidrocarburos y la caracterización de estructuras geológicas, se ha identificado la necesidad de disponer de herramientas matemáticas y computacionales robustas que permitan simular la propagación de ondas en medios homogéneos. Esta problemática afecta directamente a investigadores e ingenieros del área, en tanto que las limitaciones en los modelos de propagación generan incertidumbre en la toma de decisiones asociadas a exploración y análisis sísmico.

Ante esta situación, el presente trabajo tiene como objetivo analizar el comportamiento de ondas sísmicas en un medio homogéneo mediante la formulación de la ecuación de Helmholtz y la implementación del método de los elementos finitos. Para alcanzar dicho propósito, se empleó una metodología matemática y numérica que incluyó el análisis de la formulación débil de la ecuación de Helmholtz, la construcción de mallas de elementos finitos y la simulación computacional utilizando el software FreeFem++, lo que permitió representar y evaluar el campo de onda bajo diversas condiciones de frontera.

Como resultado, se obtuvieron simulaciones que evidencian la incidencia de las condiciones de frontera en la propagación de las ondas, así como la estabilidad y precisión del método de elementos finitos para este tipo de problemas. Los hallazgos destacan la pertinencia de aplicar modelos matemáticos y técnicas numéricas en el análisis sísmico, ya que proporcionan soluciones aproximadas con alta fidelidad en contextos donde los métodos analíticos resultan inviables. Por su parte, el impacto social y la transferencia tecnológica de este trabajo se reflejan en la posibilidad de fortalecer herramientas para la exploración geofísica y en el diseño de modelos aplicables en otros campos como la acústica, la ingeniería civil o la caracterización de materiales. La accesibilidad de herramientas libres como FreeFem++ permite reducir brechas en el acceso a tecnologías de simulación avanzadas, facilitando su implementación en distintos sectores académicos e industriales.

PALABRAS CLAVE: acústica, ecuación de Helmholtz, elementos finitos, exploración sísmica, modelación matemática, propagación de ondas.

¿Cómo citar este capítulo?

En APA: Mosquera, S., Quinto, Y. y Palacios, H. (2026). Análisis del comportamiento de ondas sísmica para la exploración de Hidrocarburos en un medio homogéneo. En Bejarano-Díaz, D. y Guzmán-Brand, V. (Ed.). Ingeniería, ciencia y tecnología: perspectivas desde la investigación aplicada (pp. 39-53). Editorial TEINCO.

DOI del capítulo: <https://doi.org/10.64351/978-628-97363-5-9.cap.2>

ABSTRACT

The study of seismic wave behavior is a fundamental aspect of geophysical exploration, as accurate modeling enables a better understanding of the dynamics of terrestrial media and supports more precise interpretation of seismic data. In the context of hydrocarbon exploration and the characterization of geological structures, there is a clear need for robust mathematical and computational tools capable of simulating wave propagation in homogeneous media. This issue directly affects researchers and engineers in the field, since limitations in propagation models generate uncertainty in decision-making processes associated with seismic exploration and analysis.

This research aims to analyze the behavior of seismic waves in a homogeneous medium through the formulation of the Helmholtz equation and the application of the finite element method. To achieve this goal, a mathematical and numerical methodology was employed, which included the weak formulation of the Helmholtz equation, the construction of finite element meshes, and computational simulations using FreeFem++, allowing for the representation and evaluation of the wave field under different boundary conditions.

The results show simulations that reveal the influence of boundary conditions on wave propagation, as well as the stability and accuracy of the finite element method for this type of problem. Findings highlight the relevance of applying mathematical models and numerical techniques in seismic analysis, since they provide highly reliable approximate solutions in contexts where analytical methods are unfeasible. The social impact and technological transfer of this study lie in the possibility of strengthening tools for geophysical exploration and designing models applicable to other fields such as acoustics, civil engineering, or material characterization. The accessibility of open-source software like FreeFem++ helps reduce technological gaps, enabling the use of advanced simulation tools across academic and industrial sectors.

KEYWORDS: acoustics, finite elements, Helmholtz equation, mathematical modeling, seismic exploration, wave propagation.

How to cite this chapter?

In APA: Mosquera, S., Quinto, Y. and Palacios, H. (2026). Análisis del comportamiento de ondas sísmica para la exploración de Hidrocarburos en un medio homogéneo. In Bejarano-Díaz, D. and Guzmán-Brand, V. (Ed.). Ingeniería, ciencia y tecnología: perspectivas desde la investigación aplicada (pp. 39-53). Editorial TEINCO.

Chapter DOI: <https://doi.org/10.64351/978-628-97363-5-9.cap.2>

INTRODUCCIÓN

El estudio de la propagación de ondas sísmicas ha adquirido una relevancia creciente en los últimos años, en particular por su estrecha relación con procesos de exploración geofísica, evaluación de riesgos naturales y análisis de la dinámica de los materiales terrestres. La sísmica, entendida como la rama de la geofísica que emplea las ondas elásticas para explorar y caracterizar las estructuras internas de la Tierra, constituye hoy en día una de las principales herramientas utilizadas tanto en la industria del petróleo y gas como en la investigación académica orientada a la comprensión de fenómenos naturales.

En este contexto, el presente trabajo se centra en el análisis del comportamiento de ondas sísmicas en un medio homogéneo, mediante el uso de la ecuación de Helmholtz y la implementación del método de los elementos finitos. La elección de este enfoque obedece a la necesidad de contar con modelos matemáticos y numéricos que permitan representar, de manera aproximada pero suficientemente precisa, el comportamiento de las ondas en medios que, si bien no son perfectamente homogéneos en la realidad, pueden considerarse como tales en condiciones controladas de simulación.

Es necesario resaltar que la exploración sísmica constituye una práctica común en la búsqueda de hidrocarburos y en la identificación de estructuras geológicas. Las ondas generadas artificialmente en la superficie se propagan a través de los estratos terrestres, por lo que, al reflejarse en discontinuidades geológicas, permiten obtener información acerca de la composición y disposición de las capas internas. Sin embargo, la complejidad de la corteza terrestre, caracterizada por cambios en la densidad, elasticidad y composición de las rocas, genera múltiples desafíos para la modelación precisa de las ondas.

Para afrontar estas dificultades, la matemática aplicada y los métodos numéricos se convierten en aliados estratégicos. La ecuación de Helmholtz, derivada de la ecuación de ondas en el régimen de frecuencia, constituye un modelo fundamental en el estudio de la propagación de fenómenos ondulatorios. Su resolución, no obstante, exige técnicas avanzadas como el método de los elementos finitos, el cual permite discretizar el dominio de estudio y aproximar soluciones en geometrías complejas o condiciones de frontera específicas.

Por su parte, el problema que da origen a esta investigación se relaciona con la limitada disponibilidad de modelos numéricos eficientes y accesibles que permitan simular la propagación de ondas sísmicas en medios homogéneos bajo condiciones de frontera diversas. Esta carencia genera incertidumbre en los procesos de interpretación de datos sísmicos y en la toma de decisiones en contextos como la exploración de recursos naturales, el análisis de estabilidad estructural o la evaluación de riesgos asociados a fenómenos sísmicos.

La elección de desarrollar esta investigación responde a la necesidad de fortalecer el uso de modelos matemáticos aplicados a la geofísica, aportando una herramienta de simulación que sea válida tanto para fines académicos como prácticos. El análisis del comportamiento de ondas sísmicas en medios homogéneos constituye un punto de partida esencial antes de avanzar hacia escenarios más complejos, en los cuales los medios pueden ser heterogéneos, anisotrópicos o presentar irregularidades geométricas significativas. Además, la incorporación del método de los elementos finitos mediante plataformas de libre acceso, como FreeFem++, otorga un valor adicional al trabajo, ya que posibilita la apropiación de herramientas tecnológicas sin restricciones de licenciamiento, lo que redundará en un mayor alcance y en la posibilidad de transferencia del conocimiento a comunidades académicas e industriales con recursos limitados.

Dentro de los principales hallazgos mediante el uso del modelo, se resalta la exactitud del modelo en frecuencias superiores a 40 Hz a través del refinamiento de la malla. El precio que se paga para obtener un bajo error es el incremento en el tamaño del sistema lineal y el costo computacional para resolverlo. Finalmente, se resaltan los criterios técnicos para mejorar la

calidad de la información sísmica, optimizar la relación señal/ruido, ajustar los modelos de propagación y tomar decisiones más seguras en la selección de sitios de perforación y estimación del potencial de producción de hidrocarburos.

OBJETIVOS E HIPÓTESIS

Objetivo general

- Analizar el comportamiento de ondas sísmicas en un medio homogéneo, mediante la formulación de la ecuación de Helmholtz y la aplicación del método de los elementos finitos, con el fin de evaluar la influencia de las condiciones de frontera en la propagación de las ondas.

Objetivos específicos

- Formular matemáticamente el problema de propagación de ondas sísmicas en un medio homogéneo, utilizando la ecuación de Helmholtz.
- Implementar el método de los elementos finitos para la resolución del problema en dos dimensiones.
- Realizar simulaciones computacionales con diferentes condiciones de frontera, analizando su impacto en la propagación del campo de onda.
- Validar la pertinencia y estabilidad de los resultados numéricos obtenidos para la exploración de hidrocarburos.

Hipótesis de investigación

¿La resolución de la ecuación de Helmholtz mediante el método de los elementos finitos constituye una herramienta eficaz para simular y analizar el comportamiento de las ondas sísmicas en un medio homogéneo, permitiendo aproximaciones numéricas estables y confiables frente a condiciones de frontera diversas, que faciliten la exploración de hidrocarburos?

MARCO CONCEPTUAL O TEÓRICO

Este marco conceptual aborda los fundamentos principales que sustentan la investigación: la teoría de ondas, la ecuación de Helmholtz como modelo matemático, el método de los elementos finitos como estrategia numérica, y los aportes de la exploración sísmica y la simulación computacional en contextos científicos y tecnológicos.

La propagación de ondas sísmicas

Las ondas sísmicas son perturbaciones que se propagan a través de los materiales de la corteza terrestre y constituyen la base de los métodos de exploración geofísica. Según Yovel et al. (2023), el movimiento de partículas dentro de un medio elástico puede representarse mediante ecuaciones diferenciales que describen tanto ondas longitudinales (P) como transversales (S). En medios homogéneos, la propagación de estas ondas puede considerarse uniforme, lo que facilita el análisis matemático al reducir las variables asociadas a heterogeneidades y anisotropías. Sin embargo, la realidad geológica es más compleja, razón por la cual los modelos homogéneos funcionan como punto de partida para validar teorías y métodos numéricos.

Autores como Bruno (2023), han señalado que la comprensión de la propagación sísmica no solo es fundamental para la exploración de hidrocarburos, sino también para la prevención de riesgos asociados a terremotos, tsunamis y otros fenómenos naturales.

La ecuación de ondas y la ecuación de Helmholtz

El fundamento matemático de la propagación ondulatoria se encuentra en la ecuación de ondas, derivada de las leyes de Newton y la elasticidad lineal. Dicha ecuación, en su forma general, se expresa como:

$$\nabla^2 u(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Donde $u(x, t)$ representa el desplazamiento; c es la velocidad de propagación; ∇^2 es el operador de Laplace. Por lo que al aplicar la transformada de Fourier en el dominio temporal, la ecuación de ondas se transforma en la ecuación de Helmholtz, formulada como:

$$\nabla^2 u(x) + k^2 u(x) = -f(x) \quad (2)$$

Donde k es el número de onda y $f(x)$ corresponde a la fuente. Así, “la ecuación de Helmholtz aparece en múltiples disciplinas: acústica, electromagnetismo, mecánica cuántica y sísmica” (Protasov et al., 2023). Su importancia radica en que describe campos estacionarios en el dominio de la frecuencia, lo cual permite analizar cómo se comporta la energía sísmica al interactuar con diferentes condiciones de frontera.

Métodos de solución de la ecuación de Helmholtz

Resolver la ecuación de Helmholtz no siempre es posible mediante métodos analíticos, especialmente en dominios irregulares. Por esta razón, se han desarrollado métodos de aproximación como:

- **Método de diferencias finitas.** Utilizado para discretizar el dominio en una grilla regular, aunque presenta limitaciones en geometrías complejas.
- **Método espectral.** Basado en expansiones en series de funciones ortogonales.
- **Método de elementos finitos (MEF).** Introducido por Courant (1943) y ampliamente desarrollado en las décadas posteriores, es hoy en día una de las herramientas más potentes para resolver ecuaciones diferenciales parciales en dominios arbitrarios.

Entre estas alternativas, el método de los elementos finitos se destaca por su versatilidad y precisión, motivo por el cual ha sido seleccionado en esta investigación.

El método de los elementos finitos (MEF)

El MEF es una técnica de aproximación numérica que consiste en dividir el dominio de estudio en subregiones llamadas elementos finitos, dentro de los cuales la solución se aproxima mediante funciones base. Estas funciones se ensamblan

en un sistema global de ecuaciones que, al resolverse, proporcionan una aproximación de la solución en todo el dominio (Pisarciuc et al., 2023).

Su formulación se apoya en el método de Galerkin y en la teoría de espacios de Sobolev, lo que asegura la convergencia bajo ciertas condiciones; una de sus ventajas principales es la posibilidad de manejar geometrías irregulares y condiciones de frontera diversas, aspecto crucial en problemas de propagación sísmica. En aplicaciones sísmicas, el MEF permite representar fenómenos como reflexiones, refracciones y atenuaciones de la onda. Estudios como los de (Zarei & Hedayati, 2024) muestran que la estabilidad del método depende en gran medida de la relación entre la longitud de onda y el tamaño de los elementos de la malla.

Herramientas computacionales en la simulación sísmica

El avance de la computación científica ha posibilitado la implementación del MEF en software especializado. Entre las herramientas más relevantes se encuentran:

- **FreeFem++**. Plataforma de código abierto que permite la resolución de ecuaciones diferenciales parciales mediante el MEF, ampliamente utilizada en entornos académicos.
- **COMSOL Multiphysics y ANSYS**. Software comercial con aplicaciones en ingeniería.
- **WaveLab y otros paquetes en MATLAB**. Orientados a la simulación de propagación de ondas.

La elección de FreeFem++ en esta investigación se justifica por su carácter gratuito, su flexibilidad y su aplicabilidad en escenarios académicos con recursos limitados.

TRANSFERENCIA TECNOLÓGICA E IMPACTO SOCIAL

Las teorías que respaldan este estudio no solo tienen implicaciones académicas, sino también sociales y tecnológicas. El uso de modelos matemáticos para simular ondas sísmicas impacta directamente en:

- **Exploración de hidrocarburos**. Al optimizar la selección de pozos exploratorios y reducir costos.
- **Prevención de riesgos**. Al contribuir a una mejor comprensión de la propagación de sismos en determinadas regiones.
- **Educación**. Al proveer herramientas de libre acceso que pueden ser utilizadas en la formación de ingenieros y geofísicos.

El impacto social se refleja en la democratización del acceso a tecnologías de simulación y en la posibilidad de transferir conocimientos a sectores con limitaciones económicas.

MATERIALES Y MÉTODOS

Tipo de investigación

El presente estudio se enmarca dentro del paradigma positivista e investigación de carácter aplicado, sustentada en el uso de modelos matemáticos y simulaciones numéricas para analizar un fenómeno físico de relevancia geofísica: la propagación

de ondas sísmicas en un medio homogéneo. Se adopta un enfoque cuantitativo y de modelación computacional, que combina la formulación teórica con la implementación de métodos numéricos en un entorno de simulación.

La naturaleza del trabajo es experimental-computacional, dado que no se recolectaron datos de campo, sino que se generaron condiciones controladas mediante modelos y programas informáticos para analizar las variables de interés.

Método general

El método utilizado fue el método de los elementos finitos (MEF), aplicado a la resolución de la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones. Este método se seleccionó por su capacidad de aproximar soluciones en dominios complejos y bajo diversas condiciones de frontera. Esta implementación del MEF se realizó a través de las siguientes fases:

1. Formulación matemática del problema de propagación sísmica en un medio homogéneo.
2. Discretización del dominio mediante la construcción de mallas de elementos finitos.
3. Definición de condiciones de frontera (Dirichlet, Neumann y Robin) para simular diferentes escenarios.
4. Implementación computacional en el software FreeFem++, una herramienta de libre acceso especializada en resolver ecuaciones diferenciales parciales.
5. Simulación numérica de la propagación de ondas sísmicas bajo distintas configuraciones.
6. Análisis comparativo de los resultados obtenidos frente a soluciones analíticas y criterios de estabilidad.

Contexto y población de análisis

La investigación no se centró en una población humana, sino en un modelo físico-matemático que representa la propagación de ondas sísmicas. El objeto de análisis fue un medio homogéneo idealizado, caracterizado por densidad y velocidad de propagación constantes. Este escenario se escogió porque permite validar el método numérico en un contexto simplificado antes de su aplicación en modelos heterogéneos o más realistas.

Herramientas y materiales

Se utilizaron tanto recursos conceptuales como tecnológicos, los cuales se describen a continuación:

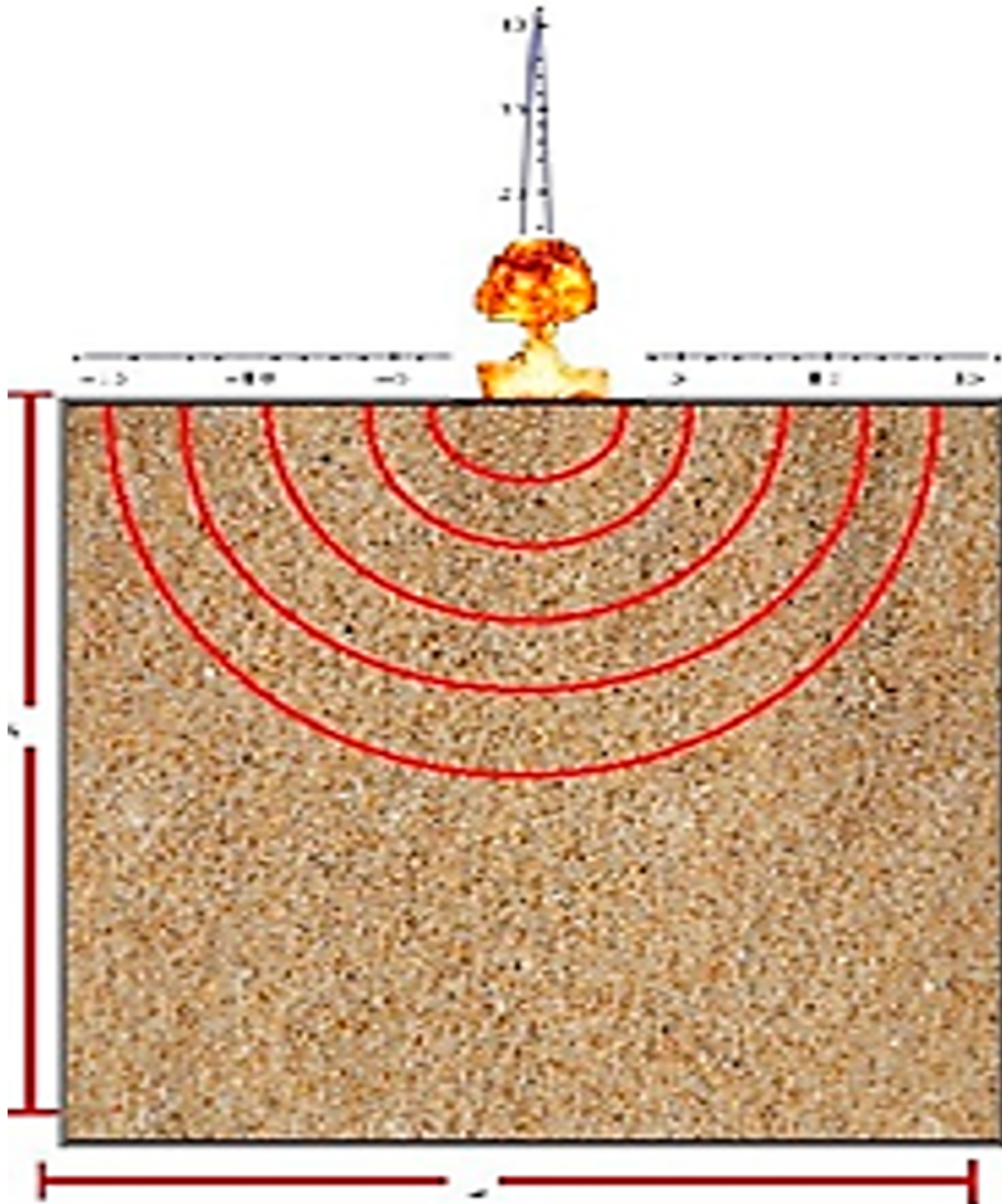
Recursos teóricos. Se hizo uso de la ecuación de ondas y su reducción a la ecuación de Helmholtz; teoría de condiciones de frontera (Dirichlet, Neumann, Robin, y no reflectantes); bases del método de Galerkin como sustento del MEF.

Recursos computacionales. Como recursos computacionales, se hizo uso de FreeFem++, como software de código abierto para simulaciones con elementos finitos; como lenguaje de programación propio de FreeFem++ para definir geometrías, mallas, funciones base y condiciones de frontera; y un equipo de cómputo con procesador de 4 núcleos, 16GB de RAM y sistema operativo Linux/Windows para la ejecución de las simulaciones.

HALLAZGOS O RESULTADOS

Se estudia la propagación acústica de la onda en una configuración geométrica definida y se presenta el problema de valor en la frontera que se desea estudiar. Se asume un medio homogéneo e isótropo; es decir, las funciones de velocidad y densidad se asumen constantes (Zhang et al., 2025).

Figura 12. Medio homogéneo para la exploración de hidrocarburos



Nota. Región (Ω) de estudio libre de medios dispersantes, para facilitar la perforación del suelo; imagen de elaboración propia.

En la región no acotada se incluyen anisotropías, no linealidades, etc. La región acotada, en la que se busca la solución numérica, se usa una función en la frontera que sirva como puente entre la solución numérica y la analítica. El problema está formulado como:

$$\Delta u(x, \omega) + \frac{\omega^2}{c(x)^2} u(x, \omega) = -\delta(x - x_0), \forall x \in \Omega \subset R^2 \quad (3)$$

$$u = G \forall x \in \Gamma \quad (4)$$

Por su parte, con el fin de comparar los resultados obtenidos con el método de los elementos finitos, se emplea una solución analítica conocida. Dada la ecuación de Helmholtz con velocidad de onda constante:

$$c(x) = c \quad (5)$$

En este sentido, un conjunto de condiciones de frontera o condiciones de radiación en dominios no acotados. Se puede encontrar una solución única para el campo u . Cuando la función de forzamiento o fuente de la ecuación de Helmholtz es un impulso, la solución puede encontrarse usando la función de Green en la forma.

$$G(x, x_0, \omega) = \frac{i \operatorname{sgn}(\omega)}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega |x - x_0|}{c(x_0)} \right) \quad (6)$$

Donde $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de orden cero, aquella que servirá para determinar el error de las aproximaciones realizadas. Además, en cuanto a las consideraciones para la determinación del campo acústico desde el punto de vista de la simulación numérica se destaca el dominio acotado

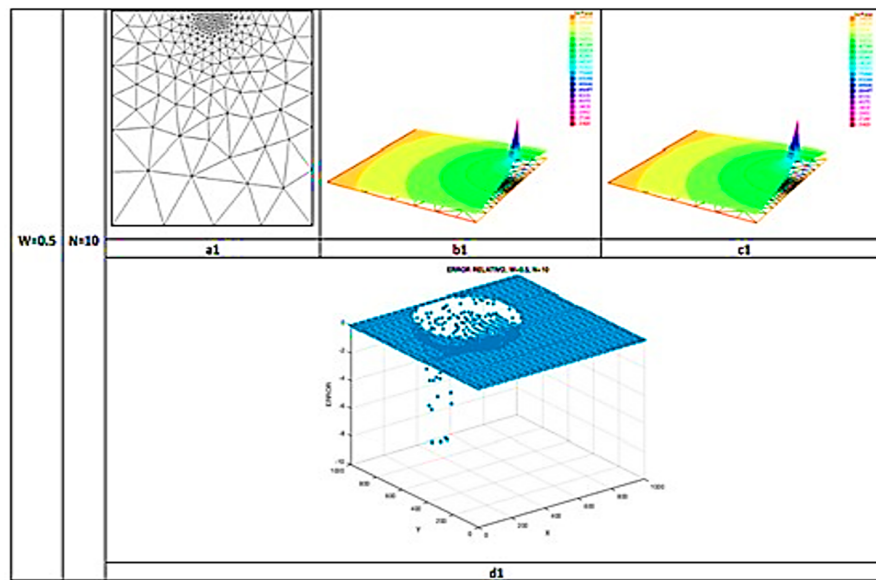
$$\Omega = (0,1000) \times (0,1000) \quad (7)$$

Medio homogéneo con velocidad $c = \frac{1600m}{s}$ (8), frecuencia (ω).

Los datos sísmicos están limitados por banda y el ancho de banda de la mayoría de datos sísmicos contienen información útil entre 5 Hz y 100 Hz. Un amplio ancho de banda es muy importante porque cuanto mayor sea este, mejor será la imagen del subsuelo. Este ancho de banda es generado con la adquisición de datos sísmicos en intervalos de tiempo regulares. Por lo general, se presentan periodos de muestreo de 1ms, 2ms, 4ms, 8ms. Para cada periodo (T) se calcula la frecuencia de muestreo como:

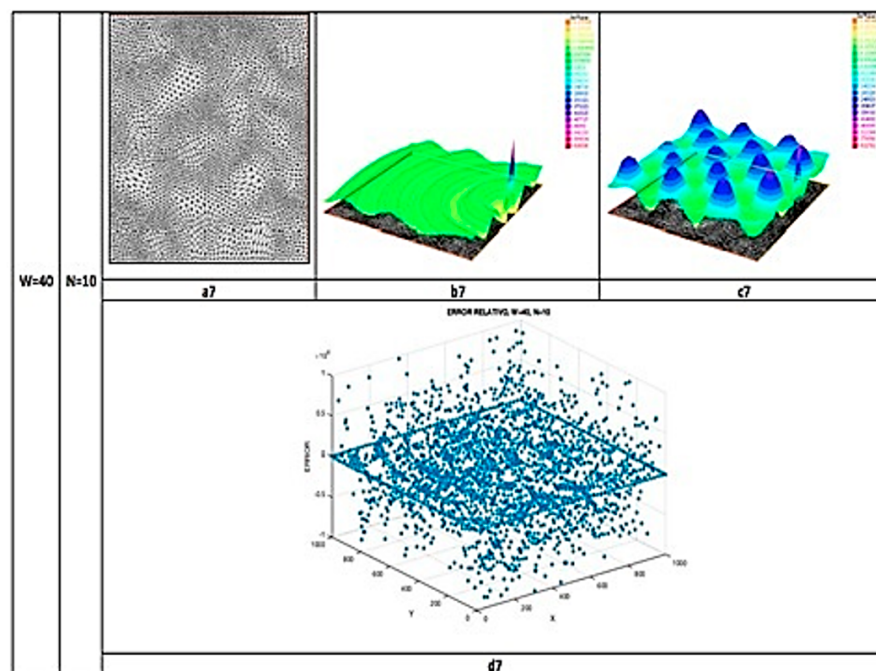
$$f = \frac{1}{T} \quad (9)$$

Para un periodo de 1 ms, se presenta una frecuencia de 1000Hz. Cuando se presenta un muestreo inadecuado de la señal, se genera ambigüedad entre los datos sísmicos y el ruido. La señal sísmica con frecuencias más altas se reconstruye en forma de señal sísmica con bajas frecuencias. Es por ello que la mayoría de los sistemas de adquisición sísmica son seguros con $f = 125\text{Hz}$, porque las fuentes sísmicas como camiones Vibro y dinamita no envían altas frecuencias muy lejos; la tierra filtra y los atenúa antes de que lleguen al receptor. Como resultados se obtienen los siguientes comportamientos de ondas para algunas frecuencias a saber:

Figura 13. Comportamiento de onda sísmica para $\omega(\text{Hz}) = 0,5$ 

Nota. Elaboración propia.

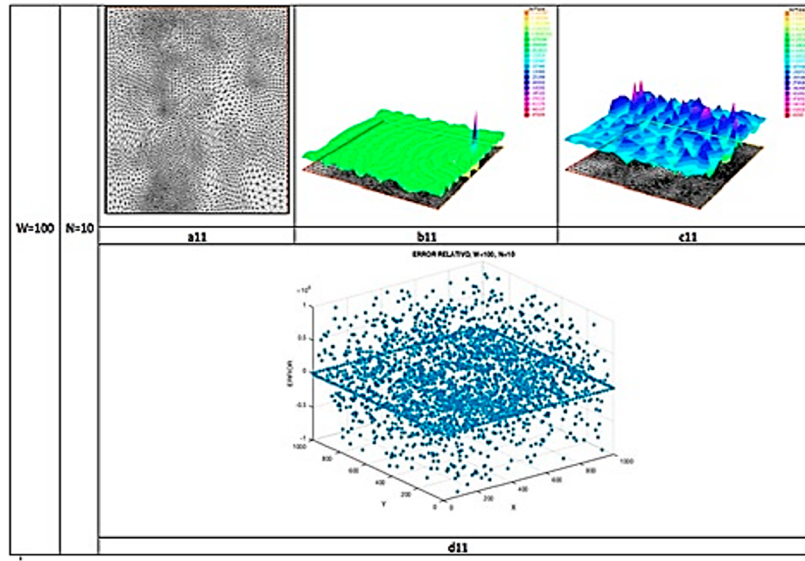
Con relación a la imagen anterior, el pico se interpreta como la zona de mayor amplitud de la señal, allí la energía se concentra más debido a la interferencia constructiva o a la proximidad con la fuente del disparo sísmico. Lo que permite penetrar más profundamente en el subsuelo, aunque con menor resolución. Esto es clave para identificar estructuras grandes como anticlinales o trampas de petróleo.

Figura 14. Comportamiento de onda sísmica para $\omega(\text{Hz}) = 40$ 

Nota. Elaboración propia.

A partir de la imagen anterior, se observa una discretización mucho más densa del dominio. Esto permite capturar fenómenos más complejos. Al igual que varios picos repetidos y distribuidos en forma periódica, semejantes a “montículos”, no penetran tan profundo como las frecuencias bajas, pero dan mayor resolución. Son las que permiten distinguir detalles finos de la estructura del subsuelo: capas delgadas, pequeñas fallas, variaciones laterales de los estratos.

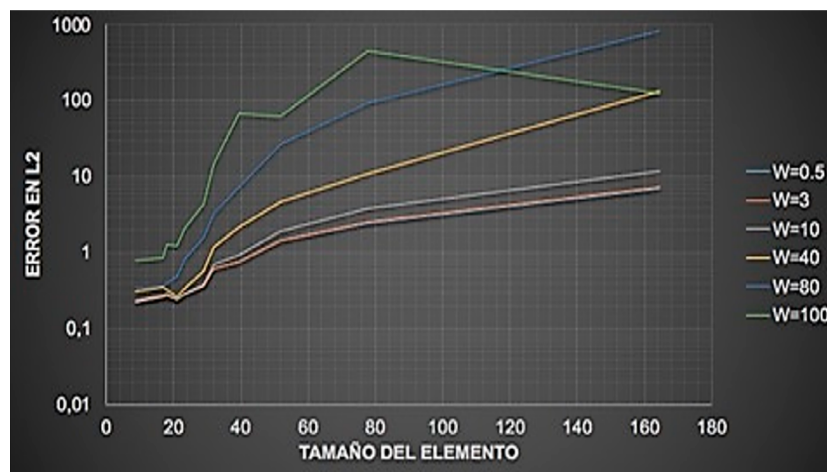
Figura 15. Comportamiento de onda sísmica para $\omega(\text{Hz}) = 100$



Nota. Elaboración propia.

Con base en esto, se observa una longitud de onda menor (más oscilaciones) al igual que la energía “se reparte” en muchos máximos, donde el campo es muy detallado espacialmente. El modelo resalta detalles finos de la respuesta sísmica (capas delgadas, pequeñas fallas y bordes de reservorio), fundamentales para la caracterización y delimitación del yacimiento. A cambio, la señal no penetra tan profundo como a frecuencias bajas, por lo que se complementa con éstas en el diseño sísmico.

Figura 16. Comportamiento del error de la norma en L^2



Nota. Elaboración propia.

El gráfico muestra que el error en norma L2 aumenta a medida que crece el tamaño del elemento y la frecuencia de la onda (W), siendo mucho más notorio para frecuencias altas como W=80 y W=100, donde el error puede dispararse en órdenes de magnitud. En la exploración de hidrocarburos, esta relación es crítica porque el modelamiento sísmico busca reproducir fielmente la propagación de ondas: un error elevado puede distorsionar las reflexiones, ocultar o inventar falsos contrastes geológicos, y por tanto conducir a interpretaciones erróneas sobre la ubicación o el tamaño de los reservorios.

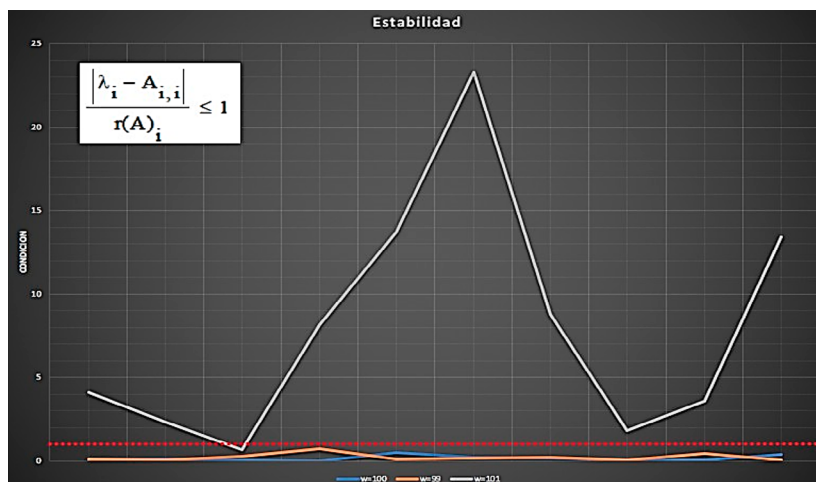
Figura 17. Comportamiento del error del error vs tiempo de Ejecución



Nota. Elaboración propia.

El gráfico muestra que, al aumentar el tamaño del elemento en la malla, el error en L2 crece, aspecto que se intensifica con frecuencias altas (W=40, W=80, W=100). Es decir, mallas más gruesas no representan bien las oscilaciones de las ondas y generan errores grandes. Si se busca demasiado detalle (malla muy fina), el tiempo de ejecución puede ser enorme, encareciendo los estudios sísmicos y retrasando la toma de decisiones en campo.

Figura 18. Criterio de estabilidad en las soluciones



Nota. Elaboración propia.

La estabilidad garantiza que pequeñas perturbaciones (ruido en datos, redondeo numérico, discretización de la malla) no crezcan desproporcionadamente en la simulación. Si la condición de estabilidad se cumple (≤ 1), los resultados son suaves,

consistentes y físicamente interpretables. Si se viola ($\gg 1$), el método “explota”: aparecen picos, oscilaciones no físicas y pérdida total de confianza en la predicción. La estabilidad en las soluciones significa que el modelo numérico controla la propagación de errores y produce resultados robustos. En exploración de hidrocarburos, esto se traduce en imágenes sísmicas confiables que permiten diferenciar con seguridad estructuras geológicas reales de artefactos numéricos, reduciendo riesgos y costos en la búsqueda de petróleo y gas.

CONCLUSIONES

Finalmente, se logró formular matemáticamente el problema de propagación de ondas sísmicas a partir de la ecuación de ondas, reducida a la ecuación de Helmholtz en el dominio de la frecuencia. Esta formulación permitió disponer de un modelo sólido para representar el fenómeno y constituyó la base sobre la cual se construyó la aproximación numérica, en donde la claridad de la formulación y su aplicabilidad en distintos campos (acústica, electromagnetismo, mecánica cuántica, entre otros) confirman la vigencia y relevancia de esta ecuación como herramienta fundamental en la física matemática.

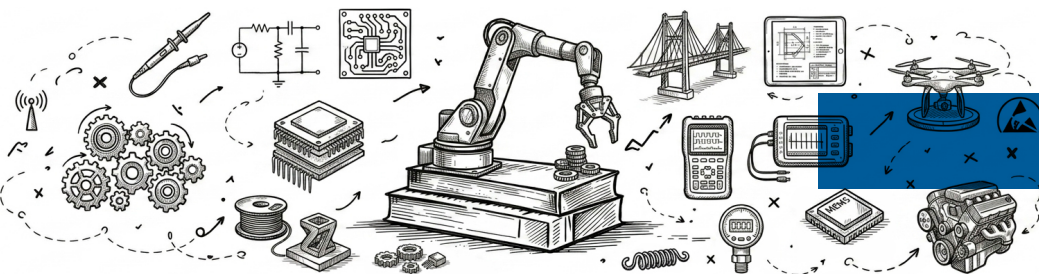
En segundo lugar, la implementación del método de los elementos finitos (MEF) demostró ser una estrategia adecuada para aproximar la solución de la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones. La discretización del dominio en mallas de elementos triangulares y la utilización de funciones base polinomiales facilitaron la resolución del problema en escenarios donde los métodos analíticos resultan impracticables. Se evidenció que la densidad y calidad de la malla tienen una influencia directa en la precisión de los resultados, confirmando la necesidad de mantener un número suficiente de nodos por longitud de onda para garantizar estabilidad numérica.

En tercer lugar, se comprobó que las condiciones de frontera ejercen un papel determinante en la propagación de las ondas. Las simulaciones revelaron que, dependiendo de si se emplean condiciones de Dirichlet, Neumann o Robin, la distribución de amplitud y fase presenta variaciones significativas. Asimismo, las condiciones no reflectantes tuvieron particular importancia, lo que permitió simular un medio infinito y reducir las reflexiones artificiales en los bordes de la malla. Este hallazgo valida uno de los supuestos iniciales, en el cual se planteó que la adecuada selección de las condiciones de frontera es clave para obtener resultados confiables en modelación sísmica.

Asimismo, los hallazgos muestran que los resultados numéricos obtenidos son consistentes con las soluciones analíticas en casos simples, lo que valida la pertinencia del enfoque empleado y abre la posibilidad de extender el análisis a medios heterogéneos y tridimensionales. Esta coherencia entre lo numérico y lo analítico fortalece la confianza en el método y constituye un punto de partida para investigaciones futuras.

Desde el punto de vista social y tecnológico, la investigación evidencia que los modelos matemáticos no solo aportan a la comprensión de fenómenos físicos, sino que también inciden en áreas estratégicas como la exploración de hidrocarburos, la prevención de riesgos sísmicos, la ingeniería civil y la acústica. El impacto se refleja en la posibilidad de optimizar procesos de exploración, mejorar la interpretación de datos y aportar al diseño de estrategias de mitigación de riesgos en zonas de alta sismicidad.

Como proyección hacia trabajos posteriores, queda abierta la posibilidad de aplicar el método de elementos finitos en dominios no homogéneos en régimen de alta frecuencia, con cambios en las propiedades en profundidad. Finalmente, se concluye que la investigación cumplió su objetivo de analizar y validar el comportamiento de ondas sísmicas en un medio homogéneo mediante la ecuación de Helmholtz y el MEF. Por esto, el presente trabajo constituye una contribución significativa al campo de la matemática aplicada y la geofísica, al demostrar la efectividad de un enfoque que combina rigor teórico con simulación computacional (Kubo et al., 2024).



REFERENCIAS

- Bruno, P. (2023). Seismic exploration methods for structural studies and for active fault characterization. *Applied Sciences*, 13(16), 9473. <https://doi.org/10.3390/app13169473>
- Kubo, H., Naoi, M., & Kano, M. (2024). Recent advances in earthquake seismology using machine learning. *Earth, Planets and Space*, 76, 36. <https://doi.org/10.1186/s40623-024-01982-0>
- Pisarciuc, C., Dan, I., & Cioară, R. (2023). The influence of mesh density on the results obtained by finite element analysis of complex bodies. *Materials*, 16(7), 2555. <https://doi.org/10.3390/ma16072555>
- Protasov, M., Gadyshin, K., Neklyudov, D., & Klimes, L. (2023). Full waveform inversion based on an asymptotic solution of the Helmholtz equation. *Geosciences*, 13(1), 19. <https://doi.org/10.3390/geosciences13010019>
- Yovel, R., Moiola, A., & Galante, N. (2023). *The Helmholtz equation for wave propagation in elastic media* [Preprint]. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2307.03242>
- Zhang, Y., Liu, H., Dai, S., & Zhang, H. (2025). Frequency-domain finite element modeling of seismic wave propagation under different boundary conditions. *Mathematics*, 13(4), 578. <https://doi.org/10.3390/math13040578>

