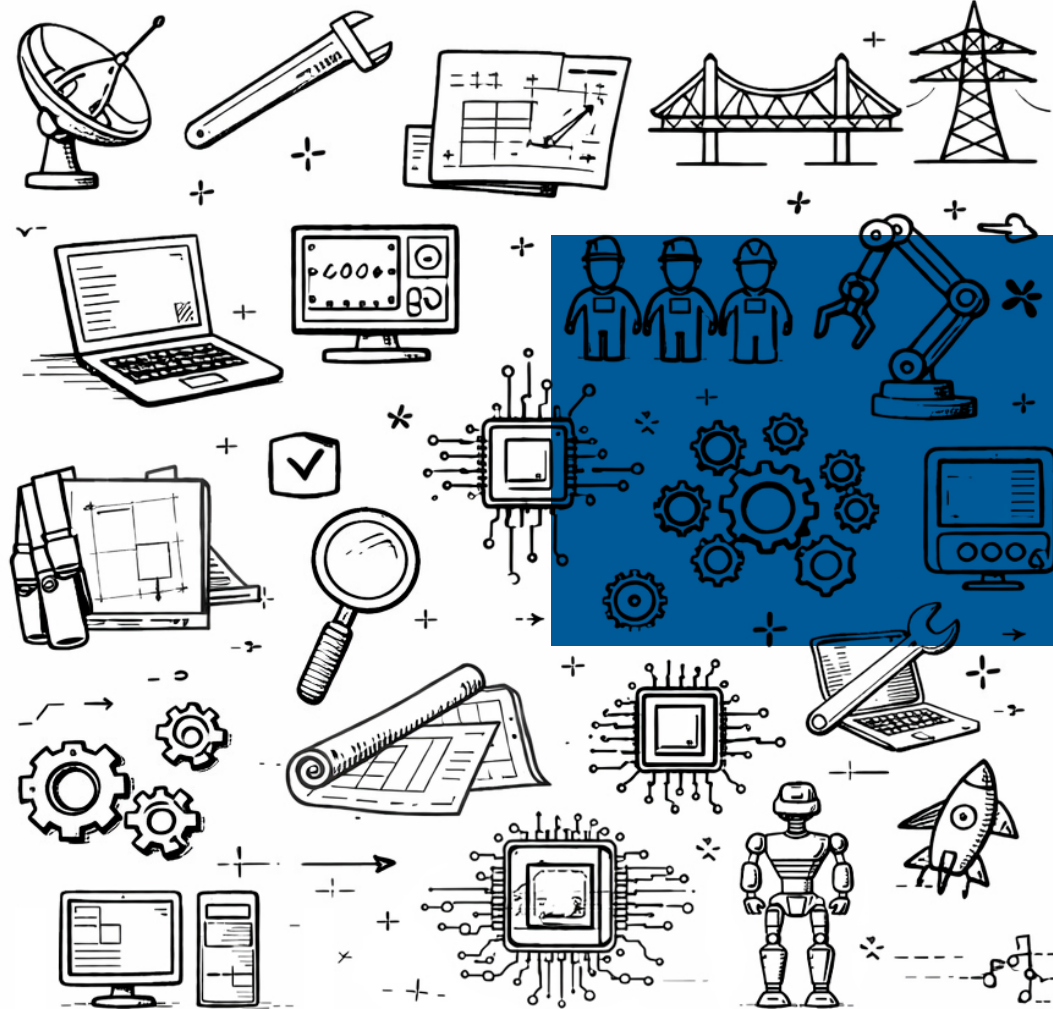




1

ANÁLISIS DE CONDICIONES DE FRONTERA EN ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES: UN ENFOQUE CON EL MÉTODO DE SOLUCIONES PARTICULARES APROXIMADAS

ANALYSIS OF BOUNDARY CONDITIONS IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS: AN APPROACH USING THE METHOD OF APPROXIMATE PARTICULAR SOLUTIONS

¹ Darwin Aramburo Palacios

² Denis Alberto Castro Rodríguez

³ Sandra Patricia Rivas Bonilla

¹ Magister en Matemáticas Aplicada, Grupo de Investigación INPEMA, Grupo de investigación GESTEM+B Universidad Tecnológica del Chocó, d-darwin.aramburo@utch.edu.co, <https://orcid.org/0000-0002-9117-4676>, https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0001456090.

² Doctor en Ingeniería, Grupo de Investigación INPEMA, Grupo de investigación GESTEM+B, Universidad Tecnológica del Chocó, dcastro@utch.edu.co, <https://orcid.org/0000-0002-6745-8310>, https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0001377349.

³ Doctora en gestión, Grupo de Investigación INPEMA, Grupo de investigación GESTEM+B Universidad Tecnológica del Chocó, d-sandra.rivas@utch.edu.co, <https://orcid.org/0000-0002-7382-6554>, https://scienti.minciencias.gov.co/cvlac/visualizador/generarCurriculoCv.do?cod_rh=0001376075.

RESUMEN

Este capítulo analiza la sensibilidad del Método de Soluciones Particulares Aproximadas (MAPS) frente a diferentes tipos de condiciones de frontera aplicadas a ecuaciones diferenciales parciales. El estudio se desarrolla a partir de simulaciones numéricas en problemas representativos de la dinámica de fluidos, incluyendo una ecuación escalar de convección–difusión, el flujo deslizante (Slip Flow) y la convección natural entre placas paralelas. Los resultados muestran que la precisión del método depende de manera significativa del tipo de condición de frontera impuesta. En particular, las condiciones de Neumann tienden a generar errores elevados en las zonas de entrada y salida, aunque estos pueden reducirse mediante distribuciones nodales más densas. Las condiciones de Dirichlet proporcionan resultados consistentes con la solución analítica, mientras que las condiciones mixtas —que combinan velocidad y tracción— ofrecen un desempeño especialmente adecuado, equilibrando estabilidad y exactitud. En conjunto, los hallazgos resaltan la importancia de seleccionar e implementar apropiadamente las condiciones de frontera al aplicar MAPS a problemas escalares y vectoriales.

PALABRAS CLAVE: tipos de condiciones de frontera, soluciones particulares aproximadas, funciones de base radial.

¿Cómo citar este capítulo?

En APA: Aramburo, D., Castro, D. y Rivas, S. (2026). Análisis de condiciones de frontera en ecuaciones diferenciales parciales: un enfoque con el Método de Soluciones Particulares Aproximadas. En Bejarano-Díaz, D. y Guzmán-Brand, V. (Ed.). Ingeniería, ciencia y tecnología: perspectivas desde la investigación aplicada (pp.17-38). Editorial TEINCO.

DOI del capítulo: <https://doi.org/10.64351/978-628-97363-5-9.cap.1>

ABSTRACT

This chapter examines the sensitivity of the Method of Approximate Particular Solutions (MAPS) to different types of boundary conditions applied to partial differential equations. The analysis is based on numerical simulations of representative fluid–dynamics problems, including a scalar convection–diffusion equation, slit flow governed by the Stokes equations, and natural convection between parallel plates. The results show that the accuracy of MAPS is strongly influenced by the boundary conditions imposed. Neumann conditions tend to produce larger errors near inflow and outflow regions, although these inaccuracies can be mitigated by employing denser or adaptive nodal distributions. Dirichlet conditions provide results that closely match the analytical solution, while mixed conditions —combining specified velocity and traction— offer a particularly balanced and effective performance, enhancing both stability and accuracy. Overall, the findings highlight the crucial role of proper boundary-condition selection and implementation when applying MAPS to scalar and vector problems in fluid dynamics.

KEYWORDS: boundary conditions types, approximate particular solutions, radial basis functions.

How to cite this chapter?

In APA: Aramburo, D., Castro, D. and Rivas, S. (2026). Análisis de condiciones de frontera en ecuaciones diferenciales parciales: un enfoque con el Método de Soluciones Particulares Aproximadas. In Bejarano-Díaz, D. and Guzmán-Brand, V. (Ed.). Ingeniería, ciencia y tecnología: perspectivas desde la investigación aplicada (pp.17-38). Editorial TEINCO.

Chapter DOI: <https://doi.org/10.64351/978-628-97363-5-9.cap.1>

INTRODUCCIÓN

En la última década, los métodos numéricos sin malla han emergido como una alternativa especialmente atractiva para la solución de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) en múltiples áreas de la ciencia y la ingeniería. Su capacidad para prescindir de una discretización estructurada ha favorecido su uso en aplicaciones relacionadas con dinámica de fluidos, transferencia de calor, procesos de transporte, ciencia de materiales y biología (Abbaszadeh et al., 2019), así como en fenómenos de escala cuántica (Mohebbi et al., 2013). Entre estos enfoques, los métodos sustentados en funciones de base radial (Radial Basis Functions, RBF) han adquirido protagonismo debido a su facilidad para adaptarse a distribuciones nodales complejas y a su notable poder de interpolación en dominios tanto regulares como irregulares (Abbaszadeh et al., 2019).

Una de las ventajas más destacadas de los métodos basados en RBF es la flexibilidad para ajustarse a variaciones geométricas y para integrarse con técnicas numéricas convencionales, lo que ha impulsado su utilización en problemas multidimensionales y en configuraciones altamente irregulares (Orsini et al., 2008; Power et al., 2017; Wright & Fornberg, 2006). Además, las RBF se reconocen como herramientas eficaces para la interpolación de datos dispersos en múltiples dimensiones (Madych & Nelson, 1990; Powell, 1994) y han sido incorporadas en diversos esquemas de colocación para resolver EDP (Jumarhon et al., 2000; Kansa & Hon, 2000). Estas aproximaciones incluyen formulaciones globales (Bustamante et al., 2013; Mohebbi et al., 2013), técnicas locales (Golberg & Chen, 1998), esquemas asimétricos centrados únicamente en la variable de solución (Chen & Tanaka, 2002; Kansa & Hon, 2000), enfoques simétricos que combinan interpolación y operador diferencial (Hon & Schaback, 2001), métodos de cuadratura diferencial basados en combinaciones de RBF (Shu & Ding, 2001) y, especialmente relevantes para este trabajo, técnicas que emplean funciones particulares aproximadas (Chen & Yao, 2014; Golberg & Chen, 1998).

El potencial de las RBF no se limita al tratamiento de operadores diferenciales, sino que se extiende a la formulación de soluciones particulares y homogéneas en problemas de valor en la frontera, como ocurre en el Método de Soluciones Fundamentales (MFS) (Fairweather & Karageorghis, 1998) y el Método de Partículas de Frontera (BPM) (Chen et al., 2010). A partir de estas ideas, Chen et al. (2014) introdujeron el Método de Soluciones Particulares Aproximadas (MAPS) con el propósito de mejorar la exactitud del método de Kansa & Hon (2000). En este enfoque, se plantea una EDP auxiliar no homogénea cuyos términos fuente son funciones de base radial, y cuya solución particular analítica se emplea como función de colocación. Desde su aparición, MAPS ha mostrado resultados prometedores y ha sido utilizado en problemas de elasticidad, flujos de Navier–Stokes (Bustamante et al., 2013) y flujos sometidos a campos magnéticos (Granados et al., 2018).

Aunque la formulación matemática de un método numérico es crucial para garantizar su precisión, factores prácticos como la imposición de las condiciones de frontera y la distribución espacial de los nodos son igualmente determinantes. En métodos de colocación, las ecuaciones se construyen aplicando las condiciones de frontera en los nodos de borde y el operador diferencial en el interior del dominio (Ramachandran & Balakrishnan, 2000). Sin embargo, diversos estudios han detectado que la precisión disminuye cerca de la frontera, situación que frecuentemente obliga a emplear refinamientos nodales o estrategias de densificación local.

La literatura ha documentado ampliamente esta problemática. La Rocca et al. (2005) enfatizaron la influencia que ejercen la ubicación y la cantidad de fuentes en métodos basados en soluciones particulares. Kitagawa (1988) evidenció que las condiciones de Dirichlet y Neumann afectan la estabilidad y el condicionamiento del sistema, lo cual obliga a seleccionar distancias adecuadas entre los nodos y la frontera. De manera coincidente, otros estudios sobre MAPS han reportado que los errores más elevados suelen concentrarse en las proximidades del borde, especialmente cuando las variables presentan

gradientes abruptos (Madych & Nelson, 1990; Yao, 2016). Si bien este efecto puede mitigarse mediante distribuciones nodales más densas, Yao et al. (2015) mostraron que los esquemas locales pueden mejorar la estabilidad, aunque exigen un acoplamiento más complejo entre nodos interiores y de frontera.

Este problema cobra especial relevancia en dinámica de fluidos, donde la imposición de condiciones de frontera asociadas a las ecuaciones de Navier–Stokes debe formularse con sumo cuidado. Xue y Barton (2012) demostraron que estas condiciones resultan críticas en distribuciones nodales irregulares, particularmente en métodos basados en la presión. Asimismo, Abbaszadeh y Dehghan (2019) estudiaron flujos no isoterms derivados de la ecuación de continuidad, destacando las dificultades para imponer condiciones de presión en dominios con fronteras abiertas. Lee y Salgado (2013) indicaron que las formulaciones de tracción aún requieren desarrollos más robustos, mientras que Guermond et al. (2010) mostraron que tanto condiciones de presión como de tracción pueden sufrir pérdidas significativas de precisión. Diversas propuestas han surgido para contrarrestar estos problemas (Quak et al., 2011) y otros trabajos han extendido este análisis a fluidos con densidad variable (Mansour & Magherbi, 2009), flujos compresibles (Granados et al., 2018) y cavidades abiertas sujetas a convección natural (Mansour & Magherbi, 2009).

Considerando estas observaciones, el presente trabajo se propone examinar de manera sistemática cómo distintos tipos de condiciones de frontera afectan la precisión del MAPS aplicado a problemas de dinámica de fluidos. Para ello, se comparan soluciones obtenidas con condiciones de Dirichlet, Neumann y mixtas en problemas con soluciones analíticas conocidas, lo cual permite evaluar rigurosamente la influencia de cada caso. La hipótesis fundamental es que, incluso cuando el problema posee una solución única bien definida, la elección e implementación de las condiciones de frontera puede modificar considerablemente la exactitud numérica alcanzada. En consecuencia, se busca poner de manifiesto que la imposición de estas condiciones constituye un componente esencial del método y no un aspecto meramente accesorio.

Asimismo, se muestra que los errores asociados a condiciones de Neumann pueden reducirse mediante un refinamiento nodal adecuado en zonas de entrada y salida, mientras que las condiciones mixtas requieren un balance apropiado entre velocidad y tracción para garantizar estabilidad. En conjunto, estos resultados ofrecen evidencia adicional sobre la relevancia que tiene la formulación de las condiciones de frontera en los métodos de colocación con RBF y, específicamente, en la aplicación del MAPS a problemas de flujo escalar y vectorial.

MÉTODO DE SOLUCIONES PARTICULARES APROXIMADAS (MAPS)

El MAPS para operadores escalares

Consideremos una ecuación diferencial bidimensional de la forma:

$$\nabla^2 u + b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y) \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

$$B(u) = g(x, y) \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (2)$$

Donde B es un operador diferencial relacionado con las condiciones de contorno; por ejemplo, $B(u) = \partial u / \partial n$ para los límites de Neumann $\partial\Omega_N$, $B(u) = u$ para las condiciones de contorno de Dirichlet en $\partial\Omega_D$, en el límite del problema $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$. La ecuación anterior es una ecuación de difusión por convección que puede ser reordenada como la siguiente expresión de tipo Poisson:

$$\nabla^2 u = h\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (3)$$

Donde:

$$h\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -b_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} - b_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y)u + f(x, y) \quad (4)$$

Para resolver numéricamente la última ecuación, se aproxima una solución particular mediante RBF, por lo tanto:

$$\hat{u}_p = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi(r_i) \quad (5)$$

Donde N representa el número total de nodos. El siguiente problema analítico auxiliar se puede definir para obtener Φ

$$\nabla^2 \Phi = \phi \quad (6)$$

Luego tenemos que:

$$\Phi(r) = \frac{1}{9} (4c^2 + r^2) \sqrt{r^2 + c^2} - \frac{c^3}{3} \ln(c + \sqrt{r^2 + c^2}) \quad (7)$$

Nótese que la ecuación se puede obtener resolviendo analíticamente $\nabla^2 \Phi(r) = \phi(r)$, debido a que el operador diferencial ∇^2 tiene simetría radial, se puede expresar como $\nabla^2 = 1/r(d/dr(r(d/dr)))$ y se puede integrar repetidamente para obtener la ecuación (Golberg & Chen, 1998; Oseen, 1901). Donde $\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$ es la RBF multi cuádrica y $r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$ es la distancia euclidiana entre un punto de colocación $x = (x, y)$ y un punto de prueba $\xi = (\xi_x, \xi_y)$. Ahora la solución puede ser aproximada por:

$$u(x, y) \cong \hat{u} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi(r_i) \quad (8)$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\nabla^2 u \cong \nabla^2 \hat{u} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \nabla^2 \Phi(r_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(r_i) \quad (9)$$

Así tenemos que la expresión en (3) queda:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(r_i) = h\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (10)$$

Donde las derivadas del lado derecho también pueden aproximarse mediante expansiones de funciones de base radial. Luego, sustituyendo la ecuación en la ecuación gobernante, se obtiene la siguiente formulación:

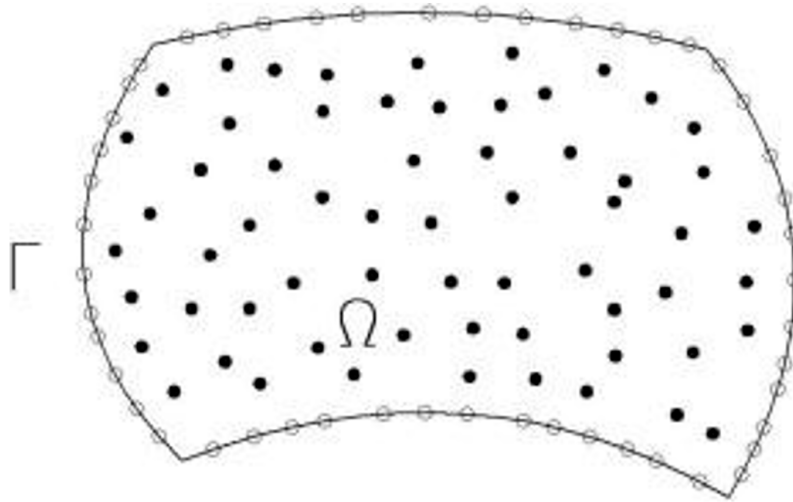
$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\phi(r_i) + \delta(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial x}(r_i) + \beta(x, y) \frac{\partial \phi}{\partial y}(r_i) + \gamma(x, y) \phi(r_i) \right) = f(x, y) \quad (11)$$

Por colocación en los nodos internos y de frontera, se obtiene un sistema de ecuaciones si se imponen las siguientes ecuaciones en el nodo j correspondiente.

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \Psi(r_{ij}) = f(x_j, y_j), \quad j = 1, \dots, N_i \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i B(r_{ij}) = g(x_j, y_j), \quad j = N_i + 1, \dots, j = 1, \dots, N_i + N_B \quad (13)$$

Figura 1. Distribución de nodos para MAPS



Nota: Elaboración propia por parte de los autores.

Donde N_B, N_i son el número de nodos frontera e interiores respectivamente, $N = N_i + N_B$, r_{ij} es la distancia entre los nodos i y j , y $\Psi(r_{ij})$ se define a partir de la ecuación (11) como:

$$\Psi(r_{ij}) = \phi(r_{ij}) + \delta(x_j, y_j) \frac{\partial \phi}{\partial x}(r_{ij}) + \beta(x_j, y_j) \frac{\partial \phi}{\partial y}(r_{ij}) + \gamma(x_j, y_j) \phi(r_{ij}) \quad (14)$$

En la figura 1 se muestra un esquema de la distribución de nodos. El sistema de ecuaciones resultante de la colocación se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} B(r_{11}) \cdots B(r_{1N}) & \vdots & \vdots & B(r_{N_B 1}) \Psi(r_{N_B+1 1}) & \vdots & \Psi(r_{N_1}) \cdots \dots \vdots & \cdots & B(r_{N_B N}) \Psi(r_{N_B+1 N}) \\ & \vdots & \Psi(r_{NN}) \end{pmatrix} (\alpha_1 \vdots \alpha_{N_B} \alpha_{N_B+1} \vdots \alpha_N) = (g(\vec{x}_1) \vdots g(\vec{x}_{N_B}) f(\vec{x}_{N_B+1}) \vdots f(\vec{x}_N)) \quad (15)$$

MAPS global para problemas de flujo de Stokes

Si se considera una región bidimensional arbitraria Ω con límite Γ , llena con un fluido incompresible, un problema de flujo de Stokes se define mediante el siguiente sistema,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \text{ en } \Omega \quad (16)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (17)$$

Donde $i = 1, 2$ representa las direcciones horizontal y vertical respectivamente, u_i es la velocidad, μ la viscosidad del fluido y p la presión. Las condiciones de frontera naturales vienen dadas por los valores de velocidad y tracción (τ_i) en la superficie, por lo tanto:

$$u_i = u_{ib} \quad \forall x \in \Gamma_u \quad (18)$$

$$\tau_i = \sigma_{ij} n_j = -p n_i + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \tau_{ib}, \quad \forall x \in \Gamma_\tau \quad (19)$$

Donde $\Gamma_u + \Gamma_\tau = \Gamma$ son las condiciones de frontera de velocidad y tracción respectivamente. En este caso, el campo de flujo la solución particular (u^l, p^l) viene dado por el siguiente sistema auxiliar de Stokes no homogéneo.

$$\mu \frac{\partial^2 u_i^l(x, \xi)}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial p^l(x, \xi)}{\partial x_i} = \phi(r) \delta_{ij} \quad (20)$$

$$\frac{\partial u_i^l(x, \xi)}{\partial x_i} = 0 \quad (21)$$

El término no homogéneo $\phi(r)$ es el multi cuadrático RBF ($r = \sqrt{(r_i^2 + c^2)}$), que depende del parámetro de forma c y de la distancia euclidiana $r = |x - \xi|$ (Bustamante et al., 2013), y δ_{ij} es el tensor delta de Kronecker. Las variables u_i^l y p^l son la velocidad y la presión particulares de Stokes, respectivamente. La fórmula de descomposición de Oseen (Power & Wrobel, 1995) se utiliza para hallar la solución fundamental correspondiente de las ecuaciones de Stokes y obtener una expresión cerrada para las soluciones particulares. Integrando la solución particular obtenemos:

$$\mu \frac{\partial^4 \psi(r)}{\partial x_j \partial x_j \partial x_m \partial x_m} \delta_{il} - \mu \frac{\partial^4 \psi(r)}{\partial x_i \partial x_i \partial x_m \partial x_m} - \frac{\partial p^l(x, \xi)}{\partial x_i} = \phi(r) \delta_{il} \quad (22)$$

$$\psi(r) = \frac{1}{12\mu} \left[\frac{1}{75} \phi(r) (4r^4 + 48r^2 c^2 - 61c^4) - c^3 \ln \ln(c) r^2 - \frac{1}{5} (5r^2 - 2c^2) c^3 \ln \ln(c + \phi(r)) \right] \quad (23)$$

$$\hat{u}_i^l(x, \xi) = \frac{1}{\mu} \left\{ \left(\frac{\Psi}{r} + \Psi''' \right) \delta_{ij} - \left[\frac{\Psi}{r} \left(\delta_{ij} - \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j}{r^2} \right) + \Psi'' \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j}{r^2} \right] \right\} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_i^l(x, \xi)}{\partial x_i} = \frac{1}{\mu} \left\{ \left[\left(\frac{\Psi'}{r^2} - \frac{\Psi''}{r} \right) + \Psi''' \right] \frac{\hat{x}_j}{r} \delta_{ij} + \left(\frac{\Psi'}{r^2} - \frac{\Psi''}{r} \right) \left(\frac{\hat{x}_l}{r} \delta_{ij} + \frac{\hat{x}_i}{r} \delta_{lj} \right) - \left[3 \left(\frac{\Psi'}{r^2} - \frac{\Psi''}{r} \right) + \Psi''' \right] \frac{\hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k}{r^3} \right\} \quad (25)$$

$$\hat{p}^l = -\mu \frac{\hat{x}_l}{r} \left[\Psi''' - \left(\frac{\Psi'}{r^2} - \frac{\Psi''}{r} \right) \right] \quad (26)$$

Finalmente, los campos de velocidad y presión de Stokes, $\hat{u}$ y $\hat{p}$, se pueden aproximar mediante una superposición lineal de N soluciones particulares ubicadas en N nodos de prueba ξ_k , como:

$$u_i(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^l \hat{u}_i^l(x, \xi_k) \quad (27)$$

$$p(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^l \hat{p}^l(x, \xi_k) \quad (28)$$

Reemplazando las ecuaciones (26) y (27) en la ecuación (17), se obtiene la siguiente ecuación, en términos de las soluciones particulares, como:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k^l \left[\frac{\partial^2 \hat{u}_i^l(r_k)}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \hat{p}^l(r_k)}{\partial x_i} \right] = \sum_{k=1}^N \alpha_k^l [\phi(r_k) \delta_{il}] = 0 \quad (29)$$

El proceso de colocación se completa reemplazando las ecuaciones (26) y (27) en las condiciones de frontera de las ecuaciones (18) y (19), esto permite escribir el siguiente sistema matricial

$$\begin{pmatrix} B^1[\hat{u}_1^1, \hat{u}_2^1, \hat{p}^1] & B^2[\hat{u}_1^1, \hat{u}_2^1, \hat{p}^1] & B^1[\hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, \hat{p}^2] & B^2[\hat{u}_1^2, \hat{u}_2^2, \hat{p}^2] & [\phi] & [0] & [0] & [\phi] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\alpha^1] \\ [\alpha^2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [g_1(x)] \\ [g_2(x)] \\ [0] \\ [0] \end{pmatrix} \quad (30)$$

con $B^k[\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{p}] = g_k(x)$ como la forma general de la condición de frontera en la dirección k -ésima, donde B^k es el operador de contorno y g_k corresponde al valor del lado derecho de la condición de contorno correspondiente.

HALLAZGOS O RESULTADOS

La influencia de diferentes condiciones de frontera sobre el MAPS se analiza mediante el estudio de la precisión de los resultados numéricos para algunos problemas con soluciones analíticas exactas. Se pueden obtener diferentes condiciones de contorno a partir de la solución exacta, lo que permite comparar los resultados numéricos obtenidos bajo dichas condiciones. Primero, se resuelve una ecuación de convección-difusión-reacción de coeficiente variable para estimar el

efecto de las condiciones de contorno de Neumann en el error numérico. Además, se resuelve un problema Slip Flow en 2D utilizando diferentes tipos de condiciones de contorno: velocidad, tracción y mixtas. Se presentan otros casos para observar el efecto de las condiciones de contorno en la solución MAPS, concretamente problemas con distribución irregular de nodos. Los errores se analizan en términos de número de nodos, tipo de distribución nodal (uniforme o refinada) y valor del parámetro de forma. La precisión numérica se evalúa en términos del error cuadrático medio (RMS) relativo, definido por:

$$\epsilon_{\varphi} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N |u_i - \hat{u}_i|^2}{N}}}{|u|_{\max}} \quad (31)$$

donde $\hat{u}_i$ y u_i son las soluciones numéricas y analíticas evaluadas en cada uno de los N puntos totales en todo el dominio, y $|u|_{\max}$ es un factor de normalización elegido como el valor más alto de la solución analítica.

Convección-difusión-reacción con coeficientes variables

Un problema escalar bidimensional dado por la siguiente ecuación se resuelve en el dominio del cuadrado unitario $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

$$\nabla^2 u + \sin \sin (x + y) u + (xy + x^2) \frac{\partial u}{\partial x} + x \sinh \sinh (y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \quad (32)$$

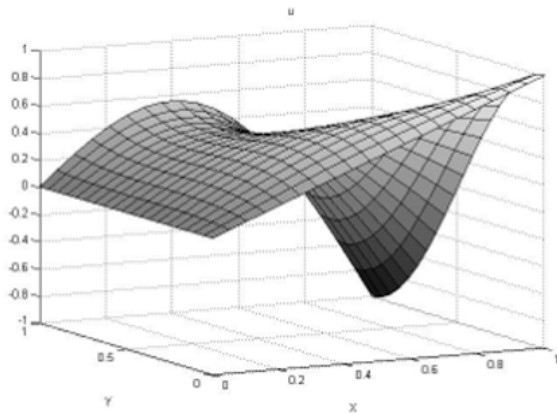
En este caso, el término forzante $f(x, y)$ se estima para satisfacer la siguiente solución analítica propuesta:

$$u = y \sin \sin (\pi x) + x \cos \cos (\pi y) \quad (33)$$

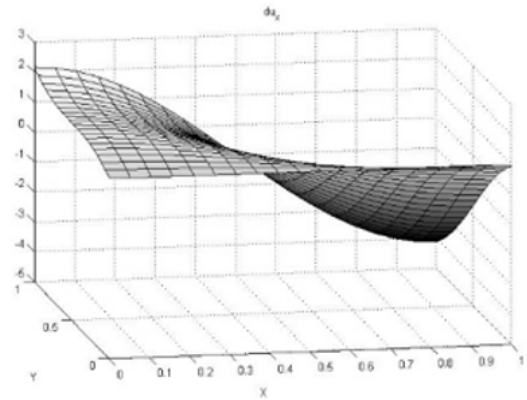
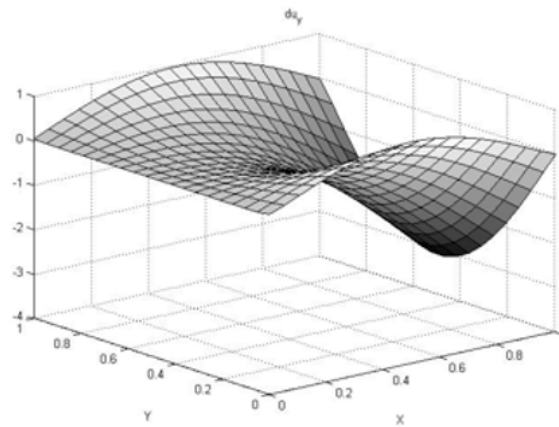
Este problema se resuelve en dos escenarios diferentes: primero, mediante la imposición de la condición de frontera de Dirichlet en todas las fronteras según la solución analítica Ec. (32). Luego, se aplica una condición de Neumann en la línea $y=0$, evaluando la derivada normal de la solución analítica propuesta para analizar la influencia de este tipo de condición en la precisión de MAPS. La solución numérica y sus derivadas, obtenidas con $N=441$ y $c=1 \times 10^{-3}$, se presentan en la Figura 2. Se puede observar que la solución presenta un comportamiento no monótono y que se encuentran gradientes más altos hacia las fronteras. Además, la derivada en la frontera $y=0$, es decir, el valor de la derivada de x , es variable y distinta de cero, lo que dificulta la aproximación numérica.

La influencia del tipo de condición de frontera en la precisión del MAPS se examina en la Tabla 1, que muestra el error RMS para diferentes distribuciones nodales cartesianas uniformes ($N=441, 961$ y 1681). Como se puede observar en la tabla, al aplicar las condiciones de frontera de Neumann, el error de u es casi un orden de magnitud mayor que en el caso de Dirichlet. Se observa una tendencia similar para la derivada $\partial u / \partial x$; es decir, el error asociado con las condiciones de Neumann es mayor que el error asociado con las condiciones de Dirichlet. En todos los casos, el MAPS converge porque, a medida que aumenta el número de puntos, el error disminuye. La última fila de la Tabla 1, muestra las tasas de convergencia calculadas $O(h)$ para cada caso, donde h representa el tamaño de la malla o la distancia entre nodos adyacentes y el exponente es una medida de la tasa de convergencia general. Como se puede observar, el uso de las condiciones de frontera de Neumann tiene un efecto adverso en la tasa de convergencia.

Figura 2. Resultados con la condición de frontera de Dirichlet



a) Solución aproximada

b) Derivada en x, $\partial u / \partial x$ c) Derivada en y, $\partial u / \partial y$

Nota: Elaboración propia por parte de los autores.

Tabla 1. Error RMS de la solución y su derivada según el tipo de condición de frontera

N	Dirichlet		Dirichlet	
	u	$\partial u / \partial x$	u	$\partial u / \partial x$
441	6.69×10^{-4}	9.43×10^{-3}	1.13×10^{-2}	1.87×10^{-2}
961	2.56×10^{-4}	4.65×10^{-3}	6.01×10^{-3}	9.84×10^{-3}
1681	1.29×10^{-4}	2.77×10^{-4}	3.85×10^{-3}	6.25×10^{-3}
$O(h)$	$2.16h^{2.65}$	$2.43h^{1.8}$	$2.44h^{1.76}$	$2.77h^{1.64}$

Nota. Elaboración propia por parte de los autores.

Problema de Slit flow

Las ecuaciones de Stokes (16) y (17) se resuelven mediante el MAPS en un canal recto 2-D de longitud $L=4$ y ancho $W=2w=2$, representado como el dominio $\Omega = [0,4] \times [-1,1]$ que se muestra en la Figura 3. Es bien sabido que este problema corresponde al flujo plano de Poiseuille con la solución exacta u_x en términos de y dada por:

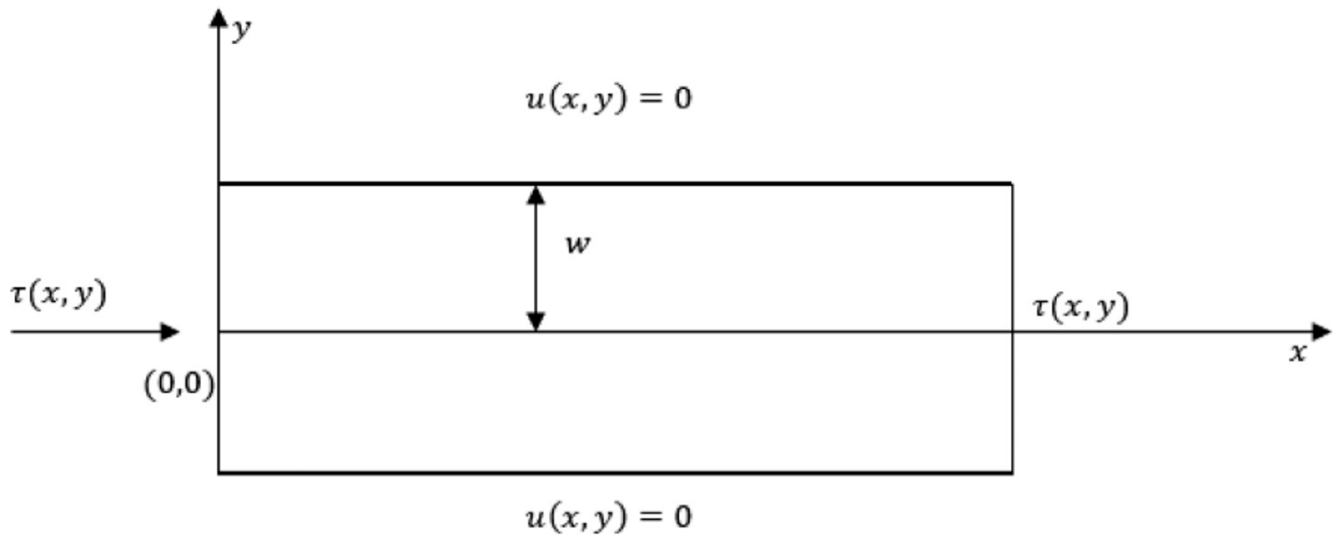
$$u_x = \frac{\Delta P}{2\mu L} (y^2 - w^2) \quad (34)$$

Donde ΔP es una constante que representa la caída de presión a lo largo del canal. En este caso, el gradiente de presión y la viscosidad se fijan como $\Delta P = -90Pa$ y $\mu = 1Pa \cdot s$, respectivamente. Frente a esto, se imponen condiciones de frontera antideslizantes en las paredes, por lo tanto:

$$u = 0, \text{ sobre } y = \pm w \quad (35)$$

Este problema es ilustrativo porque permite aplicar diferentes tipos de condiciones de frontera en los extremos del canal, obtenidas a partir de la solución exacta conocida. Además, la tracción en las esquinas sería discontinua porque el vector normal en esos puntos cambia de dirección y las componentes del vector de tracción cambian en consecuencia. El flujo se considera completamente desarrollado, por lo que la velocidad u_x no depende de la coordenada x . En el flujo unidireccional por rendija, la tracción se reduce a la expresión.

Figura 3. Dominio de problema bidimensional para Slit Flow

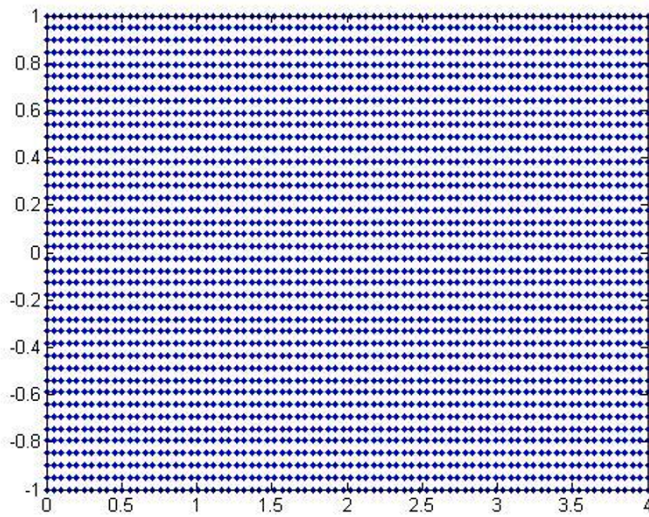


$$t = \tau \cdot n = \left(\pm p \pm \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (35)$$

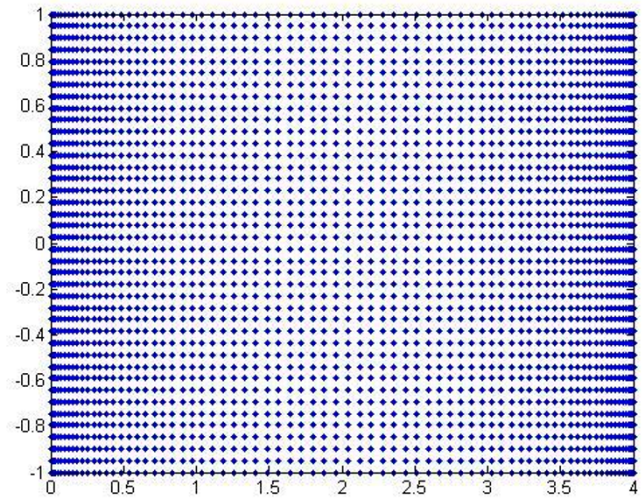
Nota. Elaboración propia por parte de los autores.

Donde el signo más-menos corresponde a la dirección del vector normal n , en la entrada $n=(-1,0)$ y en la salida $n=(1,0)$, y τ es el tensor de esfuerzo de flujo. Se proponen cuatro combinaciones de condiciones de contorno de velocidad y tracción para resolver este problema (Tipo 1 a Tipo 4), como se muestra en la Tabla 2.

Figura 4. Distribución de nodos para el problema Slit Flow



a) Uniforme



b) Refinada en dirección x

Nota. Elaboración propia por parte de los autores.

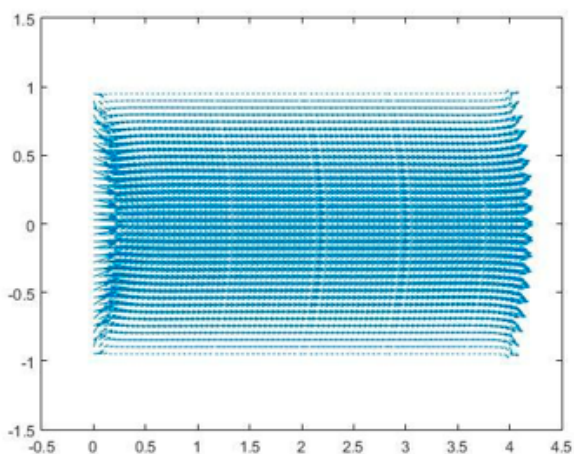
Tabla 2. Condición de frontera problema Slit Flow

	Dirichlet		Dirichlet	
	Tipo 1: Tracción	Tipo 2: Dirichlet	Tipo 3: Mixta	Tipo 4: Tracción analítica
Entrada	$(\tau_x \tau_y) = (P \ 0)$	$(u_x \ u_y) = (u_{Exacta} \ 0)$	$(\tau_x \ u_y) = (P \ 0)$	$(\tau_x \ \tau_y) = \left(P - \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$
Salida	$(\tau_x \ \tau_y) = (-P \ 0)$	$(u_x \ u_y) = (u_{Exacta} \ 0)$	$(\tau_x \ u_y) = (-P \ 0)$	$(\tau_x \ \tau_y) = \left(-P \ \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$

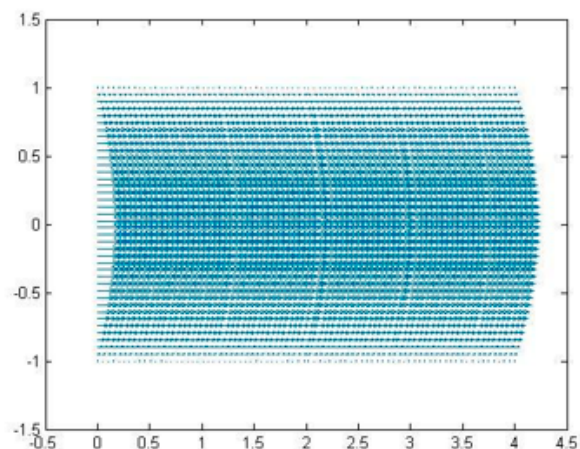
Nota. Elaboración propia por parte de los autores.

La figura 5 muestra los campos de velocidad obtenidos utilizando la distribución de nodos homogénea de la figura 4a con $N = 3200$. El efecto de aplicar una condición de frontera incorrecta se muestra claramente en la figura 5a, donde el campo de velocidad obtenido con la condición de frontera de Tipo 1 no corresponde a una situación de flujo completamente desarrollado, ya que la componente de velocidad u es distinta de cero cerca de las zonas de entrada y salida. Esto se debe a que la condición $\tau_y = 0$ impuesta en esos límites no es realista para este problema.

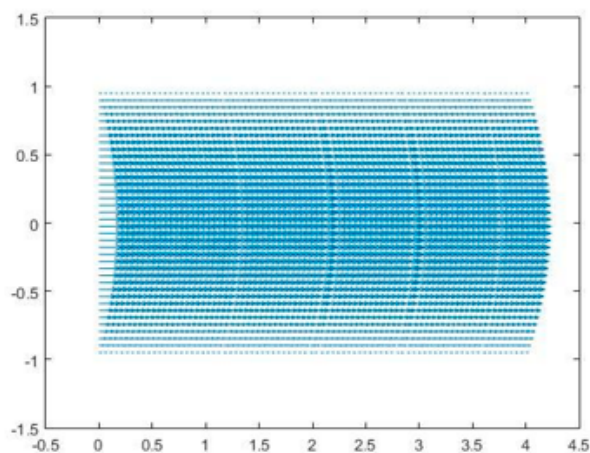
Figura 5. Campos de velocidad numérica para el problema Slit Flow



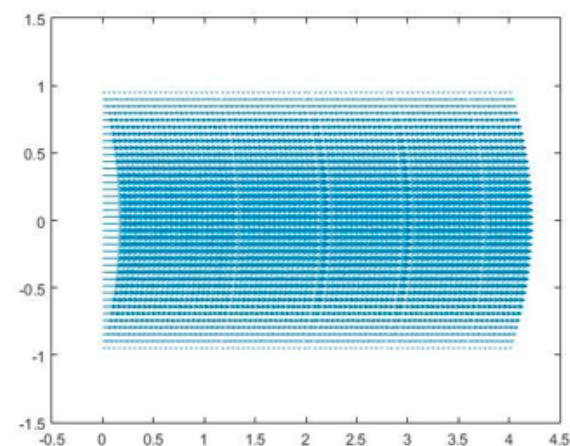
Tipo 1



Tipo 2



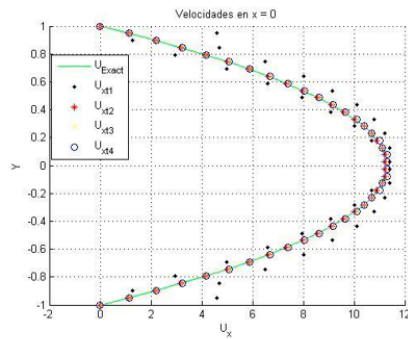
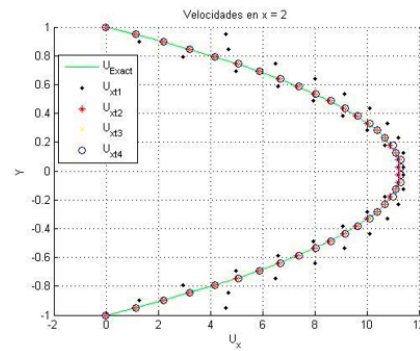
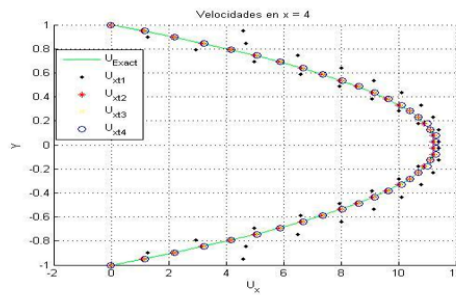
Tipo 3



Tipo 4

Nota. Elaboración propia por parte de los autores.

Según Yao et al. (2011), el error de MAPS puede reducirse refinando la distribución de nodos hacia la frontera. La figura 4b muestra dos patrones de distribución nodal: uniforme (izquierda) y refinado hacia la frontera en la dirección x (derecha). La tabla 3 muestra los errores numéricos para las distribuciones de nodos uniformes y refinadas. En el caso refinado, se observa una mejora significativa para los Tipos 3 y 4 de condiciones de frontera, en comparación con la distribución de nodos uniformes. Como consecuencia del refinamiento de los nodos, el MAPS alcanza errores numéricos del mismo orden de magnitud para las condiciones de límite de Neumann (Tipos 3 y 4) y Dirichlet (Tipo 2).

Figura 6. Perfiles de velocidad para el problema de Slit Flow con $N = 3200$ para los cuatro tipos de condiciones de fronteraa) Perfil en $x = 0$ b) Perfil en $x = 2$ c) Perfil en $x = 4$

Nota. Elaboración propia por parte de los autores.

Tabla 3. Error RMS para el problema Slit Flow

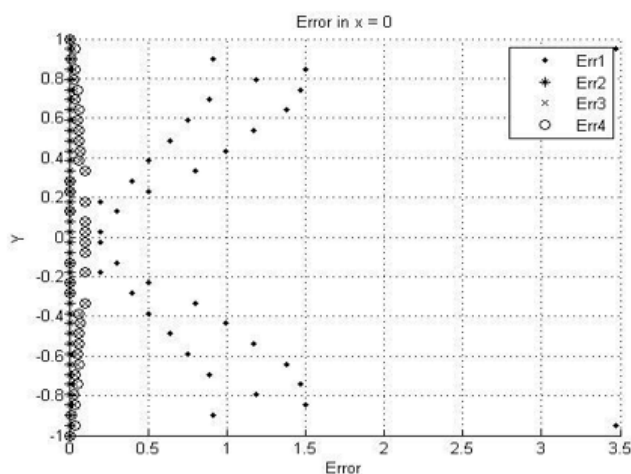
N	Distribución de nodos uniforme			
	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
450	3.74×10^{-1}	2.22×10^{-3}	2.52×10^{-2}	3.36×10^{-2}
800	7.86×10^{-2}	2.09×10^{-4}	1.52×10^{-2}	1.29×10^{-2}
1800	2.84×10^{-2}	4.72×10^{-14}	9.23×10^{-3}	9.17×10^{-3}
3200	4.18×10^{-2}	7.89×10^{-14}	5.19×10^{-3}	5.20×10^{-3}
N	Distribución de nodos malla no uniforme refinada			
	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
450	4.25×10^{-2}	2.14×10^{-3}	8.48×10^{-4}	8.48×10^{-4}
800	3.99×10^{-2}	2.60×10^{-4}	3.99×10^{-4}	3.99×10^{-4}
1800	4.13×10^{-2}	2.56×10^{-12}	4.65×10^{-12}	3.81×10^{-12}
3200	4.05×10^{-2}	4.46×10^{-12}	7.92×10^{-12}	1.06×10^{-11}

Nota. Elaboración propia por parte de los autores.

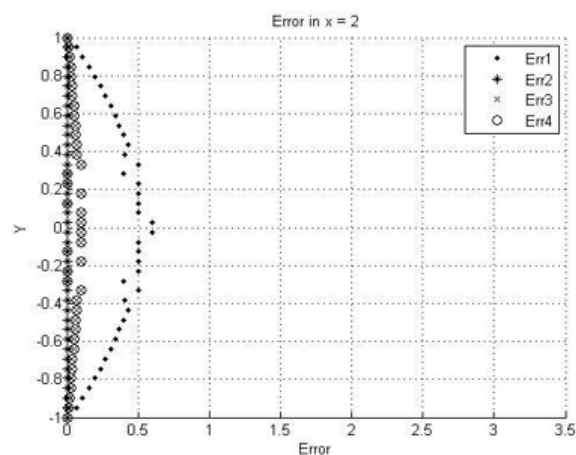
Para explorar los efectos locales de las condiciones de frontera, en la Figura 6 se presentan resultados numéricos utilizando la distribución nodal refinada. Como se muestra allí, se obtienen perfiles de velocidad similares en todo el dominio para los Tipos 2, 3 y 4, ya que son analíticamente equivalentes para un flujo completamente desarrollado. Sin embargo, sólo los Tipos 3 y 4 son numéricamente equivalentes, como se observa en la figura 7 (error), donde la diferencia entre la velocidad numérica y la analítica se representa en la misma posición x .

Las condiciones de frontera de Tipo 2 producen el mejor resultado, como se esperaba, ya que se basan en la solución de velocidad exacta conocida sin ningún cálculo de derivada. Por el contrario, el error en los Tipos 3 y 4 aumenta hacia el centro del dominio ($x = 2$), donde existe una distribución de nodos más burda tras el refinamiento.

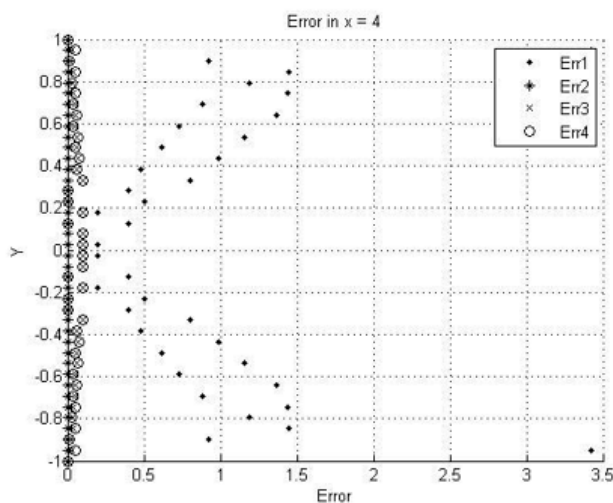
Figura 7. Perfiles de error de velocidad local para el problema de Slit Flow con $N = 3200$



a) Error u en $x = 0$



b) Error u en en $x = 2$



c) Error u en $x = 4$

Nota. Elaboración propia por parte de los autores.

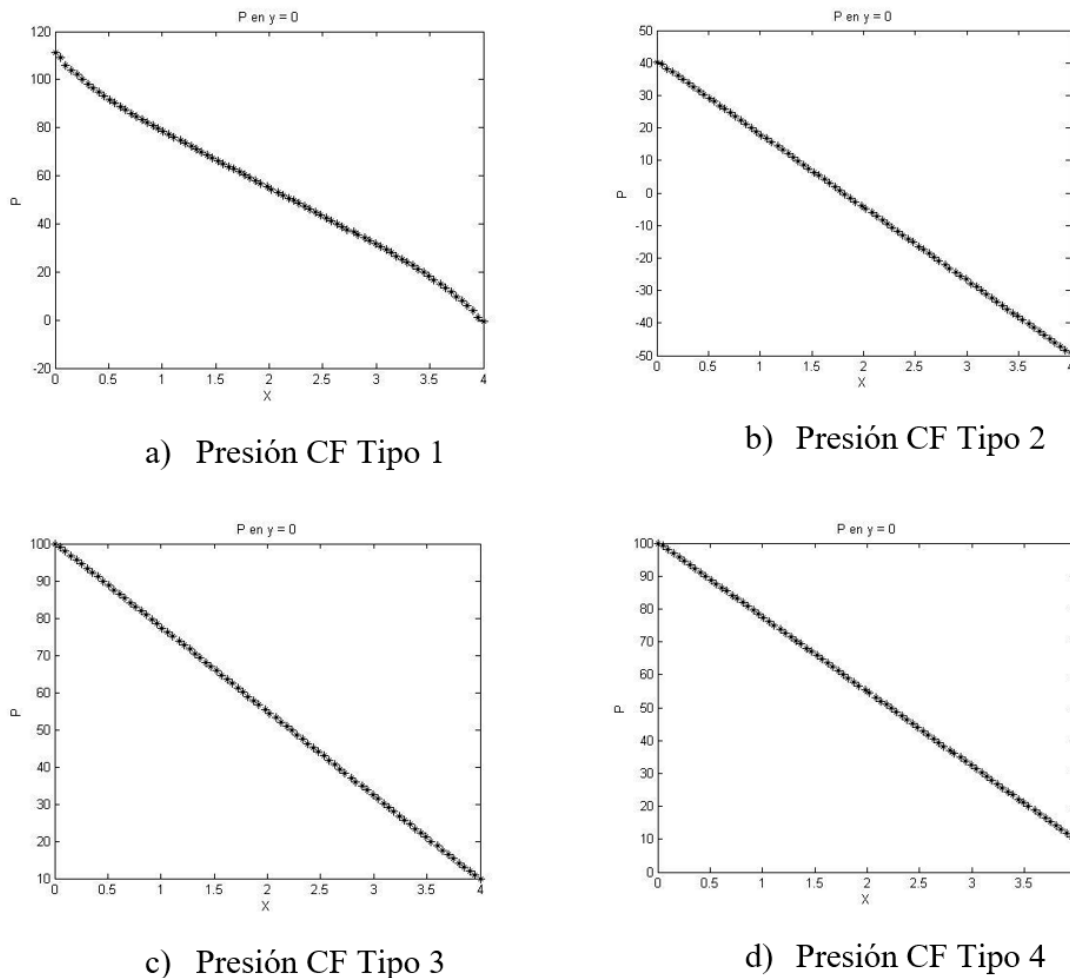
Convección natural entre placas paralelas

El uso de las condiciones de contorno mixtas propuestas en el Tipo 3 permite obtener soluciones numéricas para situaciones de flujo completamente desarrolladas, como la convección natural entre placas paralelas verticales. En este caso, la ecuación de energía estacionaria con disipación viscosa despreciable (Ecuación 46) se resuelve mediante MAPS escalares, acopladas con las ecuaciones de Stokes, incluyendo la aproximación de Boussinesq en la ecuación de momento (Ecuación 47).

$$\rho c_p \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (36)$$

$$\mu \nabla^2 u - \nabla p = -\rho \beta g (T - T_m) \quad (37)$$

Figura 8. Perfiles de error de velocidad local para el problema de Slit Flow con $N = 3200$



Nota. Elaboración propia por parte de los autores.

En las ecuaciones anteriores, c_p , κ y β son el calor específico del fluido a presión constante, la conductividad y la expansión térmica volumétrica, respectivamente, $T_m = (T_0 + T_1)/2$ es la temperatura promedio donde T_0 y T_1 son temperaturas de pared como se muestra en la Figura 9.

Considerando el flujo térmico e hidrodinámico desarrollado y suponiendo una disipación viscosa despreciable, es posible obtener las soluciones analíticas adimensionales para la temperatura y la velocidad, respectivamente, dadas por las ecuaciones (38) y (39). Estas soluciones analíticas se obtienen imponiendo condiciones de contorno de Dirichlet en las paredes para la temperatura (temperaturas fijas) y la velocidad y (condición antideslizante).

$$\frac{T-T_m}{T_1-T_m} = -x^* \quad (38)$$

$$u_y^* = \frac{1}{6} (Gr \cdot Pr)(x^{*3} - x^*) \quad (39)$$

Las coordenadas adimensionales x^* y la velocidad u_y^* y los números de Grashof (Gr) y Prandtl (Pr) se dan mediante las siguientes ecuaciones,

$$x^* = \frac{x}{x_0} \quad (40)$$

$$u^* = \frac{\rho c_p x_0}{\kappa} u_y \quad (41)$$

$$Gr = \frac{g \beta x_0^3 (T_1 - T_m)}{\nu^2} \quad (42)$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\kappa} \quad (43)$$

Donde $\nu = \mu / \rho$ es la viscosidad cinemática. A medida que el producto $Gr Pr$ aumenta su valor, los efectos de convección natural son mayores y, en consecuencia, el gradiente $\partial u_y / \partial x$ aumenta, lo que dificulta la obtención de una solución numérica precisa.

Este problema se resuelve numéricamente en el dominio bidimensional $\Omega = [-1, 1] \times [0, 2]$ con $\rho = 1$, $\beta = 0,5$ y $\kappa = 1,0$. Se varió la viscosidad (μ) para obtener diferentes valores de $Gr Pr$. Para las implementaciones de MAPS, la temperatura se aproximó en términos de las soluciones particulares de Poisson (Ecuación 11) y se impusieron las siguientes condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann:

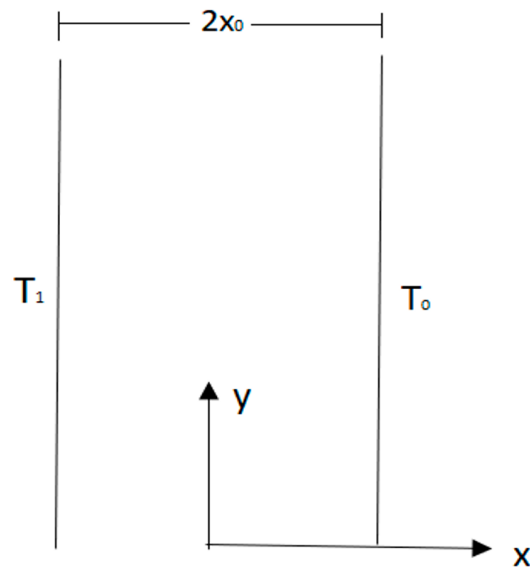
$$\{x = 1, T = T_0 \quad x = -1, T = T_1 \quad (44)$$

$$\{y = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad y = 2, \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (45)$$

Para resolver las ecuaciones de Stokes mediante MAPS, se aproximaron la velocidad y la presión en términos de soluciones particulares de Stokes con condición antideslizante en los muros límite y se impusieron condiciones de límite Tipo 3 en la entrada y la salida de acuerdo con:

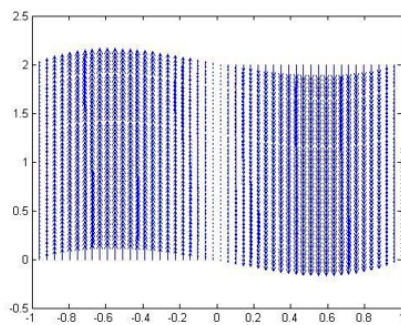
$$\{u_x = 0, \tau_y = 0 \text{ en } y = 0 \quad u_x = 0, \tau_y = 0 \text{ en } y = 2 \quad u = 0, \text{ en } x = \pm 1 \quad (46)$$

Figura 9. Dominio problema convección natural

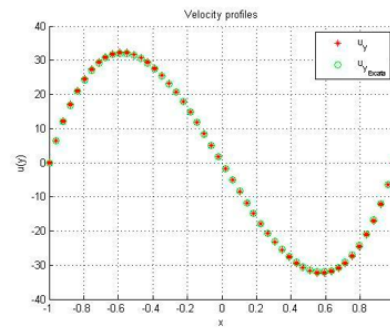


Nota. Elaboración propia por parte de los autores.

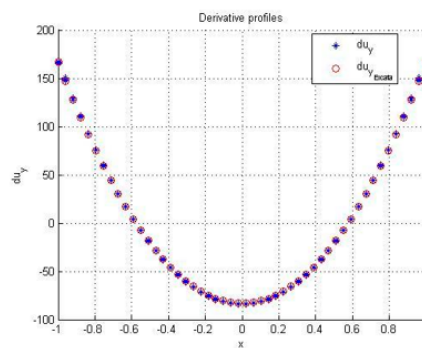
Figura 10. Solución para $GrPr = 500$: (a) campo de velocidad numérica, (b) perfil numérico y analítico de u_y en dirección x , (c) perfil numérico y analítico de $(\partial u_y)/\partial x$ en dirección x .



(a)

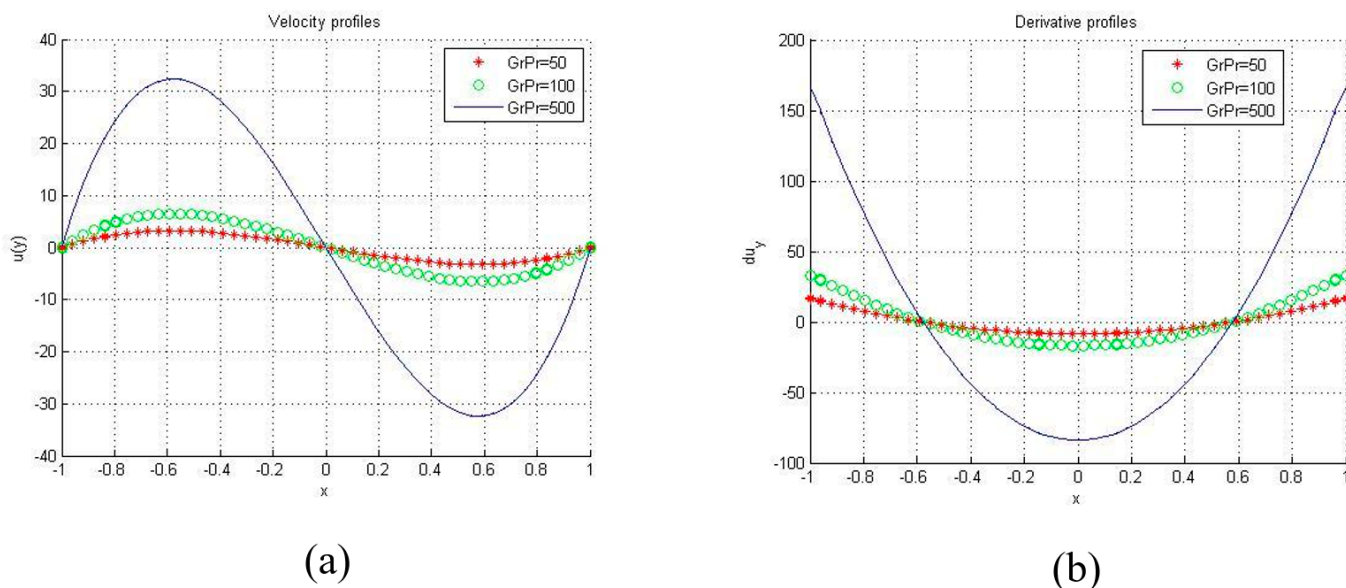


(b)



(c)

Nota. Elaboración propia por parte de los autores.

Figura 11. Comparación de resultados numéricos para diferentes valores de $GrPr$: (a) perfil u_y , (b) perfil $(\partial u_y)/\partial x$ 

Nota. Elaboración propia por parte de los autores.

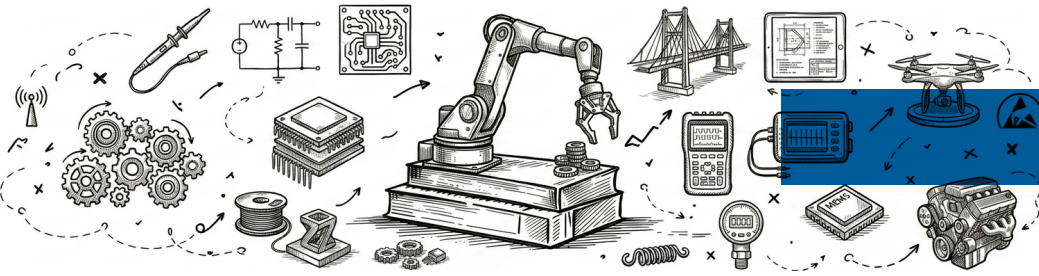
CONCLUSIONES

El análisis de los tres problemas abordados en este capítulo permite confirmar que la forma en que se imponen las condiciones de frontera influye de manera significativa en la precisión del Método de Soluciones Particulares Aproximadas (MAPS). En el caso de la ecuación escalar de convección-difusión, se evidenció que las condiciones de Neumann generan un aumento notable del error en las zonas cercanas a la frontera. Este comportamiento reafirma la sensibilidad del método ante la imposición de derivadas normales, particularmente cuando los gradientes son pronunciados. El uso de distribuciones nodales más densas demostró ser una estrategia efectiva para mitigar este efecto.

El segundo problema, correspondiente al flujo deslizante modelado con las ecuaciones de Stokes, puso de manifiesto que las inconsistencias más marcadas aparecen al emplear esquemas de frontera que no representan adecuadamente la tracción de un flujo completamente desarrollado. En particular, la condición tipo 1 —que no incluye la tracción— introdujo errores apreciables en los perfiles de velocidad internos. Sin embargo, la adopción de distribuciones nodales refinadas o adaptativas permitió reducir las discrepancias y aproximarse con mayor fidelidad a la solución analítica.

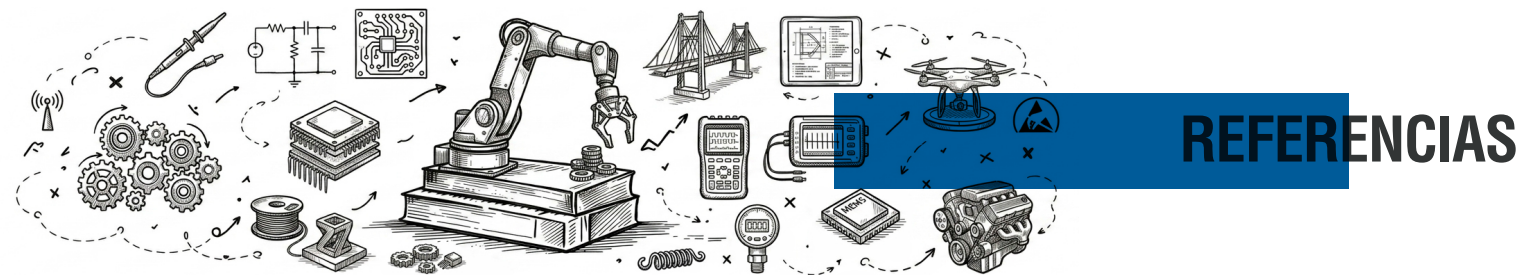
Por su parte, las condiciones mixtas empleadas en el tercer problema, relativo a la convección natural entre placas paralelas, mostraron un desempeño robusto y estable incluso para valores elevados del parámetro $GrPr$. Este esquema, que combina velocidad y tracción, se consolidó como una alternativa versátil para obtener soluciones precisas con MAPS, ya que facilita el control de la presión y estabiliza la formulación en configuraciones más complejas.

En conjunto, los resultados de estos tres casos indican que la elección de las condiciones de frontera no es un aspecto accesorio dentro del método, sino un componente determinante para garantizar la calidad de las aproximaciones numéricas. Ajustes adecuados en la formulación de las fronteras, acompañados de estrategias apropiadas de distribución nodal, permiten maximizar la efectividad de MAPS y mejorar notablemente su rendimiento en problemas de dinámica de fluidos.

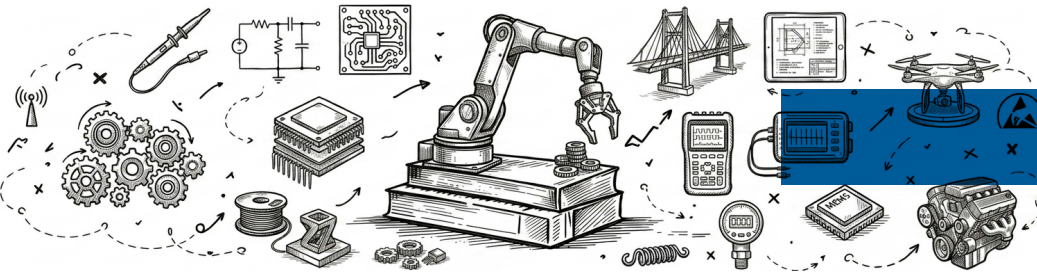


REFERENCIAS

- Abbaszadeh, M., & Dehghan, M. (2019). Meshless Petrov–Galerkin method for 2D non-isothermal incompressible flow. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 106, 300–308.
- Abbaszadeh, M., Khodadadian, A., Parvizi, M., Dehghan, M., & Heitzinger, C. (2019). A direct meshless local collocation method for solving stochastic Cahn–Hilliard–Cook and stochastic Swift–Hohenberg equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 98, 253–264.
- Bustamante, C., Power, H., & Flórez, W. (2013). A global meshless collocation particular solution method for solving the 2D Navier–Stokes system. *Computers & Mathematics with Applications*, 65(12), 1939–1955.
- Chen, W., Fu, Z., & Jin, B. (2010). A truly boundary-only meshfree method for inhomogeneous problems based on recursive composite multiple reciprocity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34(3), 196–205.
- Chen, W., Tanaka, M. (2002). A meshfree, exponential-convergence, integration-free, and boundary-only RBF technique. *Computers & Mathematics with Applications*, 43(3–5), 379–391.
- Chen, W., Yao, G., & Fu, Z. (2014). Approximate particular solutions for solving nonhomogeneous partial differential equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 44, 19–25.
- Fairweather, G., & Karageorghis, A. (1998). The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Advances in Computational Mathematics*, 9, 69–95.
- Golberg, M. A., & Chen, C. S. (1998). The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems. In *Boundary Integral Methods* (Vol. 1, pp. 103–176).
- Granados, J., Power, H., Bustamante, C., Flórez, W., & Hill, A. (2018). A global particular solution meshless approach for lid-driven cavity flow with magnetic fields. *Computers & Fluids*, 160, 120–137.
- Guermond, J. L., Mineev, P., & Shen, J. (2010). Error analysis of pressure boundary conditions for the incompressible Navier–Stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 48(1), 53–79.
- Hon, Y. C., & Schaback, R. (2001). On unsymmetric collocation by radial basis functions. *Applied Mathematics and Computation*, 119(2–3), 177–186.



- Jumarhon, B., Amini, S., & Chen, K. (2000). The Hermite collocation method using radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24(7–8), 607–611.
- Kansa, E. J., & Hon, Y. C. (2000). Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions: Applications to elliptic PDEs. *Computers & Mathematics with Applications*, 39(7–8), 123–137.
- Kitagawa, T. (1988). On the numerical stability of the method of fundamental solutions applied to Dirichlet problems. *Japan Journal of Applied Mathematics*, 5, 507–518.
- La Rocca, A. L., Rosales, A. H., & Power, H. (2005). RBF Hermite collocation for time-dependent convection–diffusion problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(4), 359–370.
- Lee, C., & Salgado, A. J. (2013). Traction boundary conditions in incompressible flow simulations. *Journal of Computational Physics*, 246, 79–100.
- Madych, W. R., & Nelson, S. (1990). Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions. *Mathematics of Computation*, 54, 211–230.
- Mansour, R. B., & Magherbi, M. (2009). Boundary condition effects on natural convection in open cavities. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52, 5923–5930.
- Mohebbi, A., Abbaszadeh, M., & Dehghan, M. (2013). The use of a meshless technique based on collocation and radial basis functions for solving the time-fractional nonlinear Schrödinger equation arising in quantum mechanics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(2), 475–485.
- Orsini, P., Power, H., & Morvan, H. (2008). Improving volume element methods by meshless radial basis function techniques. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 23(3), 187–207.
- Powell, M. (1994). The uniform convergence of thin plate spline interpolation in two dimensions. *Numerische Mathematik*, 68, 107–128.
- Power, H., Caruso, N., & Portapila, M. (2017). A note on the use of the companion solution (Dirichlet Green's function) on meshless boundary element methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 75, 57–64.



REFERENCIAS

- Quak, W., van den Boogaard, A. H., González, D., & Cueto, E. (2011). A comparative study on meshless approximations and their integration. *Computational Mechanics*, 48(2), 121–137.
- Ramachandran, P., & Balakrishnan, K. (2000). Radial basis functions as approximate particular solutions: Review. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24(7–8), 575–582.
- Shu, C., & Ding, H. (2001). Local radial basis function-based differential quadrature and its application to solve Navier–Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 941–954.
- Wright, G. B., & Fornberg, B. (2006). Scattered node compact finite-difference-type formulas generated from radial basis functions. *Journal of Computational Physics*, 212(1), 99–123.
- Xue, S.-C., & Barton, G. (2012). Implementation of boundary conditions and global mass conservation in pressure-based FV methods on unstructured grids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55, 5233–5243.
- Yao, G. (2016). An improved localized method of approximate particular solutions for elliptic PDEs. *Computers & Mathematics with Applications*, 71(1), 171–184.
- Yao, G., Sarler, B., & Chen, C. (2011). A comparison of three explicit local meshless methods using RBFs. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35, 600–609.
- Yao, G., Chen, S., Li, W., & Young, D. (2015). Localized MAPS method for near-singular 2D and 3D problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 70, 2883–2894.